

ניתוח השוואתי של מערך לימוד המתמטיקה בשלוש מדינות בעלות הישגים גבוהים במבחני פיזה

פרופ' אורית זסלבסקי, אוניברסיטת ניו יורק והטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

דר' גילה רון, מכללת אוהלו

דר' איריס זודיק, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מוגש לקרן טראמפ

נובמבר 2022

עמוד	תוכן עניינים
2	1. פתח דבר
3	2. תמונה כללית על מערכת החינוך
3	2.1 סינגפור
4	2.2 הולנד
5	2.3 פולין
6	2.4 סיכום
7	3. מסלולי למידה ודרכי מעבר בין המסלולים
7	3.1 סינגפור
8	3.2 הולנד
9	3.3 פולין
10	3.4 סיכום
10	4. תוכניות הלימודים והזדמנויות ללמידת מתמטיקה
10	4.1 סינגפור
12	4.2 הולנד
15	4.3 השוואה בין תוכנית הלימודים המיושמת בסינגפור והולנד
19	4.4 פולין
22	4.5 סיכום
23	5. המורים למתמטיקה: הכשרה והתפתחות מקצועית
24	5.1 סינגפור
24	5.2 הולנד
25	5.3 פולין
26	5.4 סיכום
27	6. בחינות ודרכי הערכה
27	6.1 סינגפור
29	6.2 הולנד
29	6.3 פולין
30	6.4 סיכום
31	7. סיכום – ממצאים, מסקנות והמלצות
31	7.1 מאפיינים משמעותיים במדינות השונות
33	7.2 המלצות
36	8. רשימת מקורות (References)
40	9. נספחים
40	9.1 נספח א': שיטת המודל
42	9.2 נספח ב': לקט משימות מתמטיות משלוש המדינות

ניתוח השוואתי של מערך לימוד המתמטיקה במדינות בעלות הישגים גבוהים במבחני פיזה

1. פתח דבר

מטרת המחקר הנוכחי הייתה להתחקות אחר מאפיינים של החינוך המתמטי בשלוש מדינות שהישגיהן במתמטיקה במבחני פיזה הם גבוהים (סינגפור, הולנד ופולין), במגמה לאתר נקודות חוזק שיכולות להסביר, לפחות באופן חלקי, את הצלחתן של אותן המדינות. תוך כדי עבודה, נוכחנו ש"סוד ההצלחה" של המדינות הללו נובע לא רק מתוכניות הלימודים ומערך ההקפנות אלא גם מגורמים נוספים. לכן התייחסנו גם להשקפת עולם ומדיניות חינוכית, למקומם של המורים בתהליכי הטמעה של תוכניות הלימוד, בהכשרת המורים והתפתחות מקצועית שלהם, ודרכי התמיכה בתלמידים.

מטבע הדברים, התמונה המצטיירת מורכבת, וההפרדה לנושאים שונים נראית לעיתים מלאכותית. כך, למשל, לא מצאנו טעם להפריד בין ניתוח משימות לימוד לניתוח פריטי מבחן, מאחר ושניהם משקפים, או לפחות אמורים לשקף, את מטרות תוכנית הלימודים. ברוב המקרים גם לא יכולנו להעריך את היקף התופעות שאיתרנו. מצאנו עושר של פעילויות שמשקפות גישות הוראה מוצהרות שלפי ראות עינינו הן רצויות ובעלות ערך רב, אולם לא יכולנו להתרשם לגבי היקף השילוב בפועל שלהן בתוכניות הלימודים המיושמות. עם זאת, שאבנו הרבה מאד תובנות מדוגמאות ספציפיות שמצאנו, אפילו אם חלקן אנקדוטיות.

2. תמונה כללית על מערכת החינוך

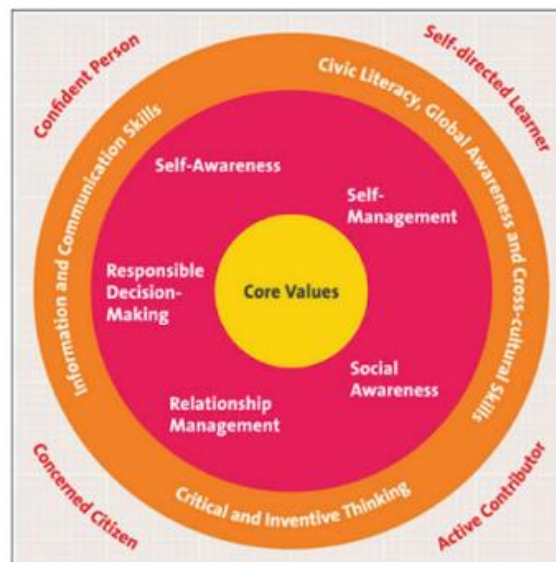
2.1 סינגפור¹

לסינגפור כאומה, ברור כי התושבים הם המשאב הטבעי העיקרי והיחיד שיש להם ולכן מטרת מערכת החינוך היא לאפשר ולעודד כל ילד למצות את יכולתו ולהתפתח לאדם טוב ואזרח פרודוקטיבי.

בסינגפור, החינוך הוא הגורם המרכזי לניידות חברתית ומספק הזדמנויות שוות לכל ילד על ידי:

- הבטחה שלכל ילד תהיינה הזדמנויות חינוכיות ללא תלות במצב פיננסי;
- מינוף מערכת בית הספר כדי לספק תמיכה למשפחות עניות או משפחות מרקע מוחלש;
- השקעה נוספת בחינוך לגיל הרך המיועד לילדים ממשפחות עניות או מרקע חלש;
- השקעה בתוכניות להעלאת הרמה האקדמית באנגלית ובמתמטיקה לתלמידים חלשים, כבר בבתי ספר יסודיים, כדי לשפר את היסודות שלהם ללמידה עתידית.

לאור העולם המשתנה, משרד החינוך בסינגפור הגדיר את המיומנויות והתוצאות הרצויות מתלמידים במאה ה-21. המסגרת, המוצגת באיור 2.1 (Kaur, 2019, p.15), מושתתת על האמונה שידע ומיומנויות חייבים להיות בבסיס בד בבד עם ערכים משותפים לכל הלומדים. ערכי הליבה שהוגדרו הם: כבוד, אחריות, יושרה, אכפתיות, חוסן והרמוניה. ערכים אלו מגדירים את אופיו של האדם ומעצבים את אמונותיו גישתו ופעולותיו. לכן, ערכים אלו מהווים את הליבה של המסגרת.



איור 2.1: המסגרת הקונספטואלית של מערכת החינוך בסינגפור

הטבעת האמצעית באיור מייצגת מיומנויות חברתיות ומיומנויות רגשיות. מיומנויות אלו נוגעות ראשית לאופן שבו תלמיד מנהל את למידתו ובעקבות כך כיצד הוא מתייחס אל תלמידים אחרים.

הטבעת החיצונית של המסגרת מייצגת את המאה ה-21 ואת ההכשרה שהתלמידים צריכים לקראת המאה הזאת כדי להיות: אדם בטוח בעצמו שיש לו הבחנה ברורה בין טוב לרע, מסתגל ועמיד, מכיר את עצמו, בעל אבחנה ויכולת שיפוט, חושב באופן עצמאי וביקורתי, ומתקשר ביעילות. לומד עצמאי ששואל, משקף, מתמיד ולוקח אחריות על למידתו. תורם פעיל המסוגל לעבוד ביעילות בצוותים. לומד שהוא חדשני, ומתרגל יוזמות,

¹ סעיף זה מבוסס בעיקר על Kaur (2019)

לוקח סיכונים מחושבים ושואף למצוינות. אזרח עם שורשים עמוקים בסינגפור, אכפתי בעל תחושה חזקה של אחריות אזרחית, בעל ידע על סינגפור ועל העולם, הלוקח חלק פעיל בשיפור חייהם של אחרים ושל סביבתו (MOE, n.d.).

החינוך בבתי ספר יסודיים ותיכונים נתמך בעיקר על ידי המדינה. כל המוסדות, פרטיים וציבוריים, חייבים להיות רשומים במשרד החינוך. אנגלית היא שפת ההוראה בכל בתי הספר הציבוריים ובכל המקצועות מלמדים ובוחנים באנגלית מלבד העיתון שהוא ב"שפת האם". בעולם נהוג להתייחס לשפת האם כשפה ראשונה בעוד שבסינגפור אנגלית היא השפה הראשונה ושפת האם היא השפה השנייה.

חינוך מתקיים בשלושה שלבים: "חינוך יסודי", "חינוך על יסודי" ו"חינוך על תיכוני". מידע מפורט ועדכני על מערכת החינוך בסינגפור אפשר למצוא [באתר של משרד החינוך](#).

2.2 הולנד²

משרד החינוך בהולנד מכתוב מה לומדים בבית הספר באמצעות סטנדרטים, תוכנית הלימודים המיועדת ומבחנים רשמיים, אבל לא מתערב כלל באופן שבו מלמדים ולומדים. לבתי הספר יש אוטונומיה בבחירת חומרי הלימוד וספרי הלימוד. באמצעות מבחני סיום של בתי הספר, היסודי והעל-יסודי, המדינה מדרבנת את המורים ללמד את התכנים שנקבעו ולעמוד בלוח הזמנים המצופה, מחד, ובו בזמן עושה בקרה אחרי התוכנית המושגת.

להורים יש חופש לבחור את בית הספר שבו הם רוצים שילדיהם ילמדו, בכפוף לכך שיש מקום באותו בית ספר. מאחר והתקציב שבתי הספר מקבלים תלוי במספר התלמידים, יש לבתי הספר אינטרס למשוך תלמידים אליהם, מה שיוצר תחרות קונסטרוקטיבית בין בתי הספר.

מערכת החינוך בהולנד מושתתת על העקרונות הבאים:

- **פיתוח כלים להתמודדות עם אתגרי העולם המשתנה.** בדומה למערכת החינוך בסינגפור, גם בהולנד בית הספר אמור להכין את התלמידים להשתלב בבוא העת בחיים האזרחיים. לשם כך, מסייעים לתלמידים לפתח ידע מקושר ומיומנויות של למידה עצמאית. כלים אלה, הנלמדים מגיל צעיר, מכוונים לעזור לבוגרי בית הספר להבין טוב יותר את העולם סביבם ולתפקד בו בצורה מושכלת. התלמידים בונים את הידע שלהם כמערכת מקושרת של תכנים ורעיונות ולא כאיים נפרדים של ידע, במגמה שכך יצליחו להתמודד באופן עצמאי עם אתגרים מגוונים ובלתי צפויים.
- **עצמאות ואחריות של התלמידים.** מצופה מהתלמידים לקבוע, בעזרת המורים, את יעדי הלמידה שלהם ולקחת אחריות על תהליך הלמידה כולו. לכל קבוצת תלמידים יש מחנך (coach) שמכיר את התלמידים ושאינו יושב להם שיחות אישיות וקבוצתיות באופן שוטף, מידי יום או מספר פעמים בשבוע. באופן כזה כל תלמיד קובע יעדים לימודיים אישיים. כדי לעמוד ביעדים אלה, התלמידים לומדים מיומנויות חשיבה ולמידה ומפתחים שפה שמאפשרת להם לעשות רפלקציה ולדבר על המיומנויות הללו ועל התקדמותם בתהליך הלמידה.
- **פיתוח כלים לעבודה שיתופית.** יש דגש במערכת החינוך על פיתוח כישורים לעבודת צוות. החללים בבית הספר מאורגנים כדי לאפשר למידה שיתופית בקבוצות קטנות. לפחות פעם בשנה התלמידים עובדים באופן שיתופי על פרויקט רב-תחומי בקבוצה. בסופו של הפרויקט התלמידים נדרשים להציג את העבודה המשותפת שלהם בפני קהל ולענות על שאלות. ההצגה צריכה לכלול מסקנות והשערות המבוססות על ניתוח נתונים הקשורים לפרויקט.

² זעירף זה מבוסס בעיקר על Daemen et al., 2020

- **מענה לכל הרמות.** יש הסללה לפי רמות החל מכיתה ז' (בחלק מבתי הספר ההסללה נדחית לכיתה ט). בכל אחד מהמסלולים לומדים מתמטיקה שמותאמת למסלול. (ר' סעיף 3.2).

2.3 פולין³

בעקבות המעבר של פולין מקומוניזם לדמוקרטיה, אשר החל בסוף שנות השמונים של המאה הקודמת, הוחלט על רפורמה מקיפה בכל מערכת החינוך.

שני חסרונות בולטים של מערכת החינוך הישנה יצרו צורך ברפורמה:

- **שיעור השתתפות נמוך מאד בהשכלה הגבוהה.** במשך עשרות שנים רק 7% מכלל האוכלוסייה בפולין למדו לימודים גבוהים במוסדות אקדמיים. מהר מאד התחוויר לקובעי המדיניות, שאם רוצים להכשיר את אזרחי המדינה לבנות שוק כלכלי מודרני המבוסס על ידע וחדשנות, דרושה רפורמה במערכת החינוך, שבמסגרתה ניתן יהיה לסייע לאזרחים לעתיד בפיתוח כישורים רבים, מעבר למה שהיה קיים באותה העת.
- **אוריינות נמוכה מאד בקרב בוגרי בתי הספר המקצועיים.** תלמידי בתי הספר המקצועיים היוו כמחצית מכל שכבת גיל. התברר שתלמידים אלה נוטים לשכוח את המיומנויות שרכשו בבית הספר היסודי. תופעה זו עמדה בסתירה למול הדרישות הגוברות לשליטה במגוון מיומנויות בשוק העבודה של הכלכלה החופשית.

המטרות המוצהרות של הרפורמה היו:

- העלאת ההישגים בחברה, ע"י הגדלת מספר הבוגרים של בית הספר התיכון ושל המוסדות להשכלה גבוהה;
- הבטחה של שוויון הזדמנויות בחינוך;
- שיפור של איכות מערכת החינוך.

שנות ה-2000 המאוחרות ⁴ Late 2000s	שנות ה-90 המאוחרות Late 1990s	שנות ה-90 המוקדמות Early 1990s
- רפורמה בתוכנית הלימודים ברמה הלאומית (מעבר מדגש על תהליכים לדגש על תוצאות) - חינוך קדם-בית ספרי חובה מגיל חמש - הקדמת הכניסה לבית ספר יסודי לגיל שש - הרחבת התוכנית החינוכית המקיפה לשנה הראשונה של החטיבה העליונה (בכל סוגי בתי הספר) - מגוון רחב יותר של נושאים מתקדמים בחטיבה העליונה - העלאת שכר המורים ב-50% - תוכנית לימודים חדשה ב-VET	- מעבר מבית ספר יסודי 8-שנתי לבית ספר יסודי 6-שנתי וחטיבת ביניים תלת-שנתית. - מערך הֶפְחָנוּת ומבחנים בסיום בית הספר היסודי, סיום חטיבת הביניים וסיום התיכון (חטיבה עליונה), וכן מבחני תעודה לחינוך המקצועי. - תוכנית לימודים חדשה (ליבה) לחינוך הכללי והחינוך המקצועי. - סטנדרטים חדשים ברמה הלאומית, ופיתוח קוריקולרי ברמה הבית ספרית - העברת האחריות לניהול בתי הספר היסודיים וחטיבות הביניים לידי השלטון המקומי - תקצוב אחיד לנפש	- הליך תחרותי לאיוש משרות של מנהלי בתי הספר - גישות הוראה חדשות (פחות שינון) - יותר אוטונומיה פדגוגית

טבלה 2.1: שלושה גלים של הרפורמה החינוכית בפולין

³ סעיף זה מבוסס על Bialecki et al. (2017) ועל דו"ח הסיור הלימודי בפולין, מטעם קרן טראמפ

⁴ הכוונה לשנים המאוחרות שבין 2000 ל-2010

על מנת להשיג את המטרות הללו, משרד החינוך הפולני החליט לערוך שינויים במבנה של מערכת החינוך הבית-ספרית, לתכנן מחדש את תוכניות הלימודים, להציע כלים חדשים להערכת התלמידים, ולעדכן את מערכת הפיקוח. המניע המרכזי לרפורמה היה הרצון להשתלב במערב, ולאמץ סטנדרטים מערביים, אירופאיים וגלובליים. לנוכח התחזיות על מגמות ההצטמקות וההתבגרות של האוכלוסייה, פולין הכירה בכך כי על מנת לקיים רמת חיים כמו שכנותיה ממערב אירופה, היא זקוקה לכוח עבודה מיומן אשר יביא את המדינה לצמיחה.

כפי שעולה מטבלה 2.1, במסגרת הרפורמה החינוכית, הוגדרו עקרונות ומדדים אשר הפכו לאבני דרך ולרכיבים המרכזיים של הרפורמה, ביניהם:

- ביזור הניהול של החינוך הכללי והמקצועי, באמצעות העברת האחריות לתפעול בתי הספר לרשויות המקומיות.
- הפחתת המונופול שהיה למדינה על הקמה והפעלה של בתי הספר.
- איוש המשרות של מנהלי בתי הספר באמצעות הליך גיוס תחרותי.
- יצירת שוק חופשי לתוכניות הוראה וספרי לימוד, תוך קביעת הליך לאישורם ע"י משרד החינוך.
- הארכה של תקופת החינוך הכללי משמונה לתשע שנים, באמצעות יצירת חטיבת ביניים תלת-שנתית. הבחירה בין המשך לימודים כלליים או מקצועיים נדחתה בשנה ועומדת על סוף כיתה ט, כלומר, בסיום חטיבת הביניים (אולם בשנת 2017, עם חילופי השלטון, חזרו למתכונת של 8 שנות בית ספר יסודי).
- שינוי בתוכנית הלימודים בבתי הספר והתמקדות בתוצאות במקום בתהליך.
- הרחבת החופש האקדמי של המוסדות להשכלה גבוהה תוך העברת האחריות והסמכות לבניית תוכניות לימוד חדשות לכל מוסד. יחד עם זאת, דרישה לניסוח תוכניות הלימוד במונחים של תוצאות לימודיות מצופות.
- מעבר מגישה חינוכית של "מסירת מידע לתלמידים" לגישה של "הפעלת התלמידים".
- הגדלת מגוון המוסדות וצורות הלימוד בחינוך בוגרים.

2.4 סיכום

אפשר לראות דמיון ושוני בשלוש המדינות שחקרנו, במיוחד בשני ההיבטים הבאים:

- **הכנת התלמידים לתפקד כאזרחים לעתיד.** שלוש המדינות שָׁמַת כמטרה לאומית להכין את הדור הצעיר להתמודדות עם אתגרי העולם המשתנה. כל מדינה מדגישה היבטים שונים. כך, למשל, בסינגפור מייחסים חשיבות רבה לחינוך לערכים ולפיתוח מיומנויות חברתיות ורגשיות. בדומה, במערכת החינוך בישראל יש תפיסת חינוך כללית מתחדשת שעולה בקנה אחד עם אותה המטרה ([תפיסה מתחדשת](#)).
- **הזדמנויות שוות ותמיכה באוכלוסיות המוחלשות.** בסינגפור רואים חשיבות עליונה להון האנושי, ולכן שמים דגש על תמיכה באוכלוסייה המוחלשת כלכלית מגיל צעיר, כדי להבטיח שיהיה להם בסיס להמשך הלימודים בכיתות הגבוהות יותר. גם בפולין, יצירת שוויון הזדמנויות הינה אחת משלוש המטרות המוצהרות של הרפורמה, שהתמקדה בהנגשה של לימודים אקדמיים לחלק גדול יותר של האוכלוסייה. לשם כך, הגדילו את מגוון המוסדות וצורות הלימוד, כדי לאפשר לבוגרי מערכת החינוך להשלים את הדרישות לקבלה ללימודים גבוהים.
- **האחריות לתוכניות הלימודים וספרי הלימוד.** בשלושת המדינות, בתי הספר רשאים לבחור את ספרי הלימוד וחומרי הלימוד. בסינגפור, תוכנית הלימודים המיועדת נקבעת ע"י משרד החינוך, שאחראי גם על אישור ספרי הלימוד. המורים יכולים לבחור מתוך רשימת ספרי הלימוד המאושרים (מראש) ע"י משרד החינוך באיזה מהם להשתמש. גם בהולנד יש תוכנית לימודים רשמית, אבל למורים יש חופש מוחלט לבחור את ספרי הלימוד וחומרי הלימוד שבהם הם משתמשים, ללא צורך באישור רשמי. ואילו בפולין, הסטנדרטים והליבה של תוכנית הלימודים נקבעים בדרג המדיני, וקיים הליך לקבלת אישור רשמי על ספרי הלימוד שבהם יש מורים שמעוניינים להשתמש. המצב בארץ דומה לזה שבסינגפור: תוכנית הלימודים לפרטיה נקבעת על ידי משרד החינוך, כמו גם רשימת ספרי הלימוד המאושרים, שמהם המורים יכולים לבחור.

3. מסלולי למידה במתמטיקה ודרכי מעבר בין המסלולים

3.1 סינגפור

3.1.1 בית הספר היסודי

בסינגפור, מתמטיקה היא נושא חובה בבתי הספר, לכן תוכנית הלימודים לוקחת בחשבון את השונות ביכולות ובצרכים של התלמידים ומספקת מסלולים ואפשרויות מובחנות כדי לתמוך ולאפשר לכולם למצות את הפוטנציאל שלהם. כל ילד מקבל חינוך יסודי של שש שנות לימוד המורכב משלב בסיס של ארבע שנים ושלב הכוונה של שנתיים. תוכנית הלימודים הראשית בבית הספר מספקת לילדים בסיס איתן במקצועות כגון שפות, מדעי הרוח והאומנויות, מתמטיקה ומדעים; מיומנויות חשיבה ותקשורת; וכלים להתפתחות אישית ברוח ערכי יסוד (כגון, כבוד הדדי, אחריות, יושר).

גישה זו עוזרת לתלמיד להתמקד ולפתח את הפוטנציאל שלו בנושאים (סטנדרטיים) בהם הוא חזק תוך כדי בניית היסודות בנושאים (בסיסיים) בהם הוא זקוק ליותר תמיכה. לנושאי הבסיס יש תמיכה בצורה של כיתה קטנה יותר, שבה המורים מתמקדים בסגירת פערים וסיוע לתלמידים בהתאם לקשיים שלהם כך שיוכלו ללמוד ולהתקדם בקצב המתאים להם ובהתאם לצרכיהם. ההחלטה לקחת נושא בסיס נשענת לרוב על הישגיו של התלמיד בנושא בסוף יסודי ד' בהתייעצות צמודה של בית ספר וההורים או אפטרופוסים של הילד. בתום שש שנות בית ספר יסודי, התלמידים ניגשים לבחינת סיום של בית הספר היסודי (PSLE), המבחן שבדוק שפה אנגלית, שפת אם, מתמטיקה ומדע בשתי רמות.

יש בבית הספר היסודי שני מסלולים במתמטיקה: באחד - תוכנית מתמטיקה **סטנדרטית** ובשני - תוכנית מתמטית **בסיסית**. הנושאים של תוכנית הלימודים זהה לכל התלמידים מיסודי א ועד יסודי ד (MOE, 2012a). עם זאת, בכיתות ה-ו יש הבדלים בין תוכנית המתמטיקה הסטנדרטית לתוכנית של המתמטיקה הבסיסית. תוכנית הלימודים הסטנדרטית לכיתות ה-ו הינה המשך טבעי של התוכנית עד כיתה ד', בעוד שבתוכנית של המתמטיקה הבסיסית יש חזרה על כמה מהנושאים החשובים שנלמדו כבר, במגמה לסייע בסגירת פערים במושגים ומיומנויות הכלולים בתוכנית של כיתות ד. מערך זה מאפשר גמישות רבה יחסית לילדים, מכיוון שהם יכולים לקחת שילוב של נושאים מהתוכנית הסטנדרטית גם אם הם משובצים לתוכנית הבסיסית, כדי להעמיק בתחומים ספציפיים בהתאם לנטיותיהם ונקודות החוזק שלהם.

3.1.2 בית הספר העל-יסודי

לאחר שש שנות לימוד בבית הספר היסודי, בבית הספר העל-יסודי ישנם שלושה מסלולי לימוד שונים: מסלול מהיר (Express), הכולל את התוכנית המשולבת [IP], מסלול רגיל-אקדמי [N(A)] ומסלול רגיל-טכני [N(T)]. מסלול ה-IP מיועד לתלמידים חזקים מבחינה אקדמית שיכולים ליהנות מתוכניות המספקות חוויות למידה רחבות יותר. מסלול זה נועד לסייע לתלמידים למצות את הפוטנציאל שלהם גם בהיבטים לא אקדמיים, שהם מעבר ללימודים הפורמליים של תוכנית הלימודים. תלמיד שמשוּבץ בהתחלה למסלול אחד, יכול לעבור למסלול אחר בשלבים שונים של הלמידה, בהתאם להתקדמותו, יכולתו, והעניין שלו. בדומה לבית הספר היסודי, התלמידים יכולים ללמוד נושאים ספציפיים ממסלול יותר מתקדם. לדוגמה, אלה שלומדים במסלול N(T), יכולים לקחת חלק מהמקצועות ברמת N(A). תרשים 3.1 מציג את שלוש תוכניות הלימודים בנושא מסוים באלגברה 1 בבית הספר העל-יסודי, לכל מסלול בנפרד⁵.

מתרשים 3.1 עולה כי כל שלש התוכניות כוללות אלמנטים משותפים:

- שימוש באותיות לייצוג מספר לא ידוע;
- סמלים, ייצוגים ופרשנות של ביטויים אלגבריים פשוטים, כגון: $a \times 3$, $a \pm 3$, $a \div 33$ או a , או $a/3$;
- פישוט ביטויים אלגבריים אלמנטריים;
- הערכה של ביטויים אלגבריים פשוטים;

⁵ תרשים 3.1 לקוח מ- Kaur (2019), עמוד 21 (Figure 2.5)

Secondary One - Algebra		
Express Course	Normal (Academic) Course	Normal (Technical) Course
Algebraic expressions and formulae - Using letters to represent numbers - Interpreting notations ab as $a \times b$, $\frac{a}{b}$ as $a \div b$, or $a \times \frac{1}{b}$ a^2 as $a \times a$, a^3 as $a \times a \times a$, a^2b as $a \times a \times b$, ... $3y$ as $y+y+y$ or $3 \times y$ $3(x+y) = 3 \times (x+y)$ $\frac{3+y}{5}$ as $(3+y) \div 5$ or $\frac{1}{5} \times (3+y)$ - Evaluation of algebraic expressions and formulae - Translation of simple real-world situations into algebraic expressions - Recognizing and representing patterns / relationships by finding an algebraic expression for the nth term - Addition and subtraction of linear expressions - Simplification of linear expressions with integral coefficients such as $-2(3x-5) + 4x$; $\frac{2x}{3} - \frac{3(x-5)}{2}$ - Use brackets and extract common factors Equations and inequalities - Concepts of equation and inequality - Solving linear equations with integral coefficients in one variable - Solving simple inequalities in the form $ax \leq b$, $ax \geq b$, $ax < b$ and $ax > b$ where a and b are integers. - Solving simple fractional equations that can be reduced to linear equations such as $\frac{x}{3} + \frac{x-2}{4} = 3$; $\frac{3}{x-2} = 6$ - Formulating a linear equation in one variable to solve problems	Algebraic expressions and formulae - Using letters to represent numbers - Interpreting notations ab as $a \times b$, $\frac{a}{b}$ as $a \div b$, or $a \times \frac{1}{b}$ a^2 as $a \times a$, a^3 as $a \times a \times a$, a^2b as $a \times a \times b$, ... $3y$ as $y+y+y$ or $3 \times y$ $3(x+y) = 3 \times (x+y)$ $\frac{3+y}{5}$ as $(3+y) \div 5$ or $\frac{1}{5} \times (3+y)$ - Evaluation of algebraic expressions and formulae - Translation of simple real-world situations into algebraic expressions - Recognizing and representing patterns/relationships by finding an algebraic expression for the nth term - Addition and subtraction of linear expressions - Simplification of linear expressions with integral coefficients such as $-2(x-y)$; $4x - 2(3x-5)$; $3(x-y)(2y+x) - y$ Equations and inequalities - Concept of equation - Solving linear equations with integral coefficients in one variable - Formulating a linear equation in one variable to solve problems	Algebraic expressions and formulae - Using letters to represent numbers - Interpreting notations ab as $a \times b$, $\frac{a}{b}$ as $a \div b$, or $a \times \frac{1}{b}$ a^2 as $a \times a$, a^3 as $a \times a \times a$, a^2b as $a \times a \times b$, ... $3y$ as $y+y+y$ or $3 \times y$ $3(x+y) = 3 \times (x+y)$ $\frac{3+y}{5}$ as $(3+y) \div 5$ or $\frac{1}{5} \times (3+y)$ - Evaluation of algebraic expressions and formulae - Translation of simple real-world situations into algebraic expressions - Recognizing and representing number sequences (including finding an algebraic expression for the nth term for simple cases such as $n + 3$, $2n + 1$).

תרגילים 3.1: השוואה בין תוכניות הלימודים בשלושת המסלולים בנושא של ביטויים אלגבריים ונוסחאות

במסגרת המתמטיקה הבסיסית בבית הספר היסודי, תלמידים אינם לומדים אלגברה כלל. לכן, תוכנית הלימודים של אלגברה למסלול הטכני $N(T)$ בבית הספר העל-יסודי הוא מאד בסיסי. לעומת זאת, תוכנית הלימודים של המסלול המהיר נשענת על התכנים באלגברה שנכללים בתוכנית של המתמטיקה הסטנדרטית בבית הספר היסודי, והוא משתרע מהשימוש באותיות לייצוג של מספרים ועד לפתרון אי-שוויונים פשוטים, לרבות פתרון משוואות לינאריות עם שברים ובנייה של משוואות לינאריות במשתנה אחד לפתרון בעיות בהקשרים מציאותיים. תוכנית הלימודים של המסלול האקדמי $N(A)$ מוכלת בתוכנית הלימודים של המסלול המהיר ומתמקדת בעיקר בחיזוק הבסיס באלגברה, אך אינה כוללת אי-שוויונים ושברים אלגבריים.

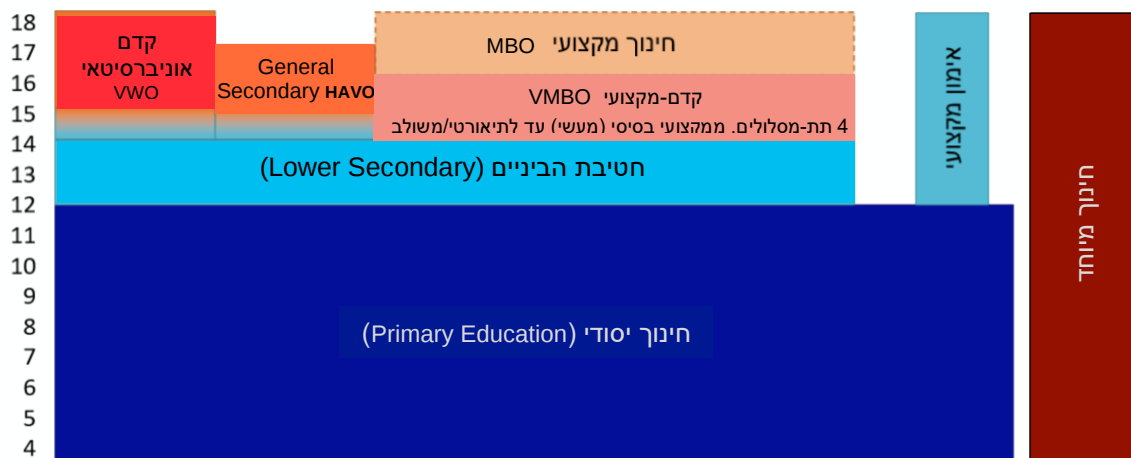
3.2 הולנד⁶

כחלק מהמדיניות לתת מענה לכל הרמות של התלמידים, יש הסללה למסלולים ולרמות החל מכיתה ז' (בחלק מבתי הספר ההסללה נדחית עד לכיתה ט'). בכל אחד מהמסלולים שיעורי המתמטיקה מדגישים תכנים ומיומנויות המתאימים למסלול והנמצאים בהלימה עם אלה שנלמדים בשיעורים האחרים. בכך מתאפשרות הוראה ולמידה מותאמות יותר המדגישות פיתוח של מיומנויות מתמטיות שונות.

בדומה למערכת החינוך בסינגפור, גם במערכת החינוך בהולנד יש מסלולי לימוד שונים, כשמכל מסלול יש אפשרויות שונות להתקדם למסלולים אחרים. המטרה היא לאפשר לתלמידים למצוא את האפשרויות המתאימות להם ביותר. לכל מסלול תוכנית לימודים מובחנת במתמטיקה. גם במסלול הגבוה (האקדמי), יש ארבעה תתי-מסלול של מתמטיקה. המתמטיקה היא חלק מתפיסה כללית של תת-המסלול והיא נבדלת מזו

⁶ סעיף זה מבוסס בעיקר על Daemen et al., 2020

שבמסלולים האחרים בתכנים ובמיומנויות המודגשות. תרשים 3.2 מתאר את מסלולי הלימודי הבית-ספריים בהולנד. המספרים בעמודה השמאלית מייצגים את גיל התלמידים.



תרשים 3.2 : מסלולי הלימוד בהולנד

חוק חינוך חובה חל החל מגיל 4 ועד גיל 16. הלימודים בבית הספר היסודי מתחילים בגיל 4 ומסתיימים בגיל 12 (מקביל לסיום כיתה ו בארץ). השנתיים הראשונות של בית הספר היסודי דומות יותר לגן ילדים הנהוג בארץ. לקראת סוף כיתה ו התלמידים נבחנים במבחן ארצי אשר קובע (יחד עם המלצת המורים ובשיתוף עם ההורים והתלמידים) את מסלול הלימודים של התלמיד. בבית הספר העל-יסודי התלמידים לומדים באחד משלושה מסלולים מרכזיים: חינוך מקצועי (בו לומדים כ- 60% מתלמידי הולנד), חינוך כללי (כ- 28% מהתלמידים) וחינוך קדם-אוניברסיטאי (כ- 22% מהתלמידים). שלוש השנים הראשונות של בית הספר העל-יסודי הן כלליות יותר, ויש בתי ספר שבהם תלמידים מהמסלולים השונים לומדים יחד. אבל בבתי ספר רבים החלוקה לשלושת המסלולים הנפרדים נעשית כבר מכיתה ז. במהלך שלוש השנים האלה התלמידים לומדים שבעה או שמונה מקצועות: הולנדית, אנגלית, מתמטיקה, מדעי הטבע, מדעי החברה (כולל היסטוריה, גיאוגרפיה), אומנות, חינוך גופני. פירוט של המסלולים השונים אפשר למצוא בדו"ח המלא על סיור לימודי בהולנד מטעם קרן טראמפ (2022).

במרבית המסלולים והמגמות, התלמידים לומדים מתמטיקה וניגשים למבחן מסכם בסוף לימודי התיכון. עם זאת, המתמטיקה שהתלמידים לומדים במסלולים השונים ובמגמות השונות, היא שונה. כמו כן, יש מגמות שבהן התלמידים מסיימים ללמוד מתמטיקה כבר בכיתה י.

3.3 פולין⁷

עם החלת השינוי המבני והקמת בתי הספר התיכוניים החדשים בפולין, עמדו בפני בוגרי כיתה ח ארבע אפשרויות ללימודים על-יסודיים:

1. *Lyceum* – תיכון כללי, תלת-שנתי, הממוקד במתן יסודות רחבים של חינוך כללי כהכנה להשכלה הגבוהה.
2. *Lyceum Profilowane* – תיכון ייעודי, תלת-שנתי, שמהווה מסגרת חדשה המשלבת בין התיכון הכללי לתיכון המקצועי.
3. *Technikum* – תיכון מקצועי, ארבע-שנתי, הממוקד בפיתוח כישורים מקצועיים ברמת טכנאי וחינוך כללי ברמה המספיקה לבחינת הבגרות והמשך להשכלה הגבוהה.

⁷ סעיף זה לקוח מדו"ח הסיור הלימודי בפולין, מטעם קרן טראמפ

זסלבסקי, רון, זודיק: ניתוח השוואתי של מערך לימוד המתמטיקה במדינות בעלות הישגים גבוהים במבחני פיזה, נובמבר 2022

4. תיכון מקצועי בסיסי, דו-שנתי בלבד.

מסלולי הלמידה בשלשת בתי הספר הראשונים (תיכון כללי, תיכון ייעודי, ותיכון מקצועי) מסתיימים בבחינה מסכמת (Matura), המהווה דרישת קדם לכניסה למוסדות להשכלה גבוהה. לעומתם, בוגרי בית הספר התיכון המקצועי הבסיסי שמעוניינים להתקבל למוסד להשכלה גבוהה יכולים להמשיך במסגרת בתי ספר תיכוניים למבוגרים, כדי להשלים את השנה החסרה ולזכות בהזדמנות לכניסה למוסדות להשכלה הגבוהה.

3.4 סיכום

ראינו שבכל שלוש המדינות, יש הסללה מגיל צעיר, עם אפשרות למעבר בין המסלולים.

- בפולין ראו שהשקעה בתלמידים החלשים מקפיצה את ההישגים של המדינה במבחני פיזה בצורה משמעותית, בין היתר, כי לתלמידים החלשים יש יותר זמן להתקדם.
 - בסינגפור רואים חשיבות להשקיע בהון האנושי ולתת הזדמנויות שוות לאוכלוסיות מוחלשות. הם משקיעים ותומכים בסגירת פערים וחיזוק התלמידים החלשים בכל שלב בלימודים, במגמה לאפשר להם לעבור ממסלול אחד למסלול גבוה יותר. הם עושים זאת באמצעות מעקב מוקדם אחר התקדמות התלמידים ברמת הפרט.
 - בסינגפור ובהולנד יש תוכנית לימודים במתמטיקה מובחנת ומותאמת לכל מסלול.
- בדומה למדינות הללו, בישראל יש הקבצות בחטיבת הביניים, אך אין לכל הקבצה תוכנית לימודים מובחנת ומותאמת.

4. תוכניות הלימודים והזדמנויות ללמידת מתמטיקה

בפרק זה, החלקים הקשורים לסינגפור והולנד מבוססים במידה רבה על (Kaur, Wong, & Govindani (2020) ועל (Lee, Ng, & Lim (2019).

4.1 סינגפור

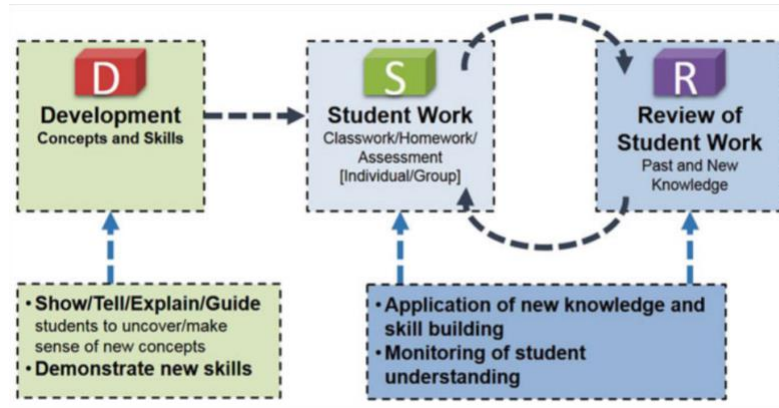
תוכנית הלימודים בסינגפור נבחנת מחדש ומתעדכנת אחת למספר שנים. התוכנית עודכנה ולוטשה במהלך השנים אך לא הוחלפה. מטרות תוכנית הלימודים הן משני סוגים: מטרות הקשורות לצרכי התלמידים ומטרות לאומיות. תוכנית הלימודים מושפעת ממחקר ומגישות חדשניות המתפתחות בעולם. מושגים חדשים (כמו מטה-קוגניציה) מובאים בחשבון בתכנון תוכנית הלימודים, זמן קצר מאד לאחר הופעתם לראשונה בשיח החינוכי הבינלאומי. כך, למשל, המסגרת הקונספטואלית של תוכנית הלימודים במתמטיקה בסינגפור דומה לזו של פיזה (איור 4.2), וכמו כן לתוכנית יש קווי דמיון ל- Common Core Standards בארה"ב (CCSSI, 2010). אחד המאפיינים שהתגבשו במהלך שנות ליטוש התוכנית הוא ללמד פחות כדי ללמוד יותר, כלומר, הפחתת כמות הנושאים כדי להשקיע יותר בכל אחד מהם.

תוכנית הלימודים מתייחסת לשני היבטים מרכזיים: ההיבט התְּכָנִי (מה מלמדים ומתי) וההיבט הפדגוגי (איך ללמד). נושאי הלימוד הנכללים בתוכנית הלימודים של סינגפור דומים במידה רבה לאלה של תוכנית הלימודים בישראל. לעומת זאת, בשונה מישראל, הגישה הפדגוגית בסינגפור מדגישה סדר קבוע בהצגת נושאים מתמטיים (CPA – Concrete, Pictorial, Abstract): הנושאים מוצגים תחילה באמצעות עזרים מוחשיים, בהמשך באמצעות תמונות ולבסוף באופן מופשט. גישה זאת מכוונת לכך שהתלמידים ייצרו קשרים בין שלושת הייצוגים האלה, ותואמת את גישתו של Bruner (1960, 1966).

שתי נקודות המבט, התְּכָנִית והפדגוגית, הובילו לתכנון מוקדם של מסלול הוראה ספירלי, שכולל: חיזוק (במובן של קונסולידציה) של תכנים שנלמדו בעבר, באמצעות חזרה אליהם בהמשך בהתאם ליכולת הקוגניטיבית המתפתחת של התלמידים, במקביל (או בנפרד) לידע שנוסף ולמיומנויות שנרכשות. התוכנית בכללותה שמה

דגש על קישוריות. הספירליות מקדמת קשרים תוך מושגיים, לרבות קישור התוכן החדש לידע ולמיומנויות הקיימים, בעוד שההתנסויות בגישה הפדגוגית (CPA) תורמות להבנת ההיגיון שבנושאים שונים ובפרט לקישור בין הידע הפרוצדורלי לקונספטואלי. קשרים נוספים שמודגשים בתוכנית הם קשרים לעולם המציאותי.

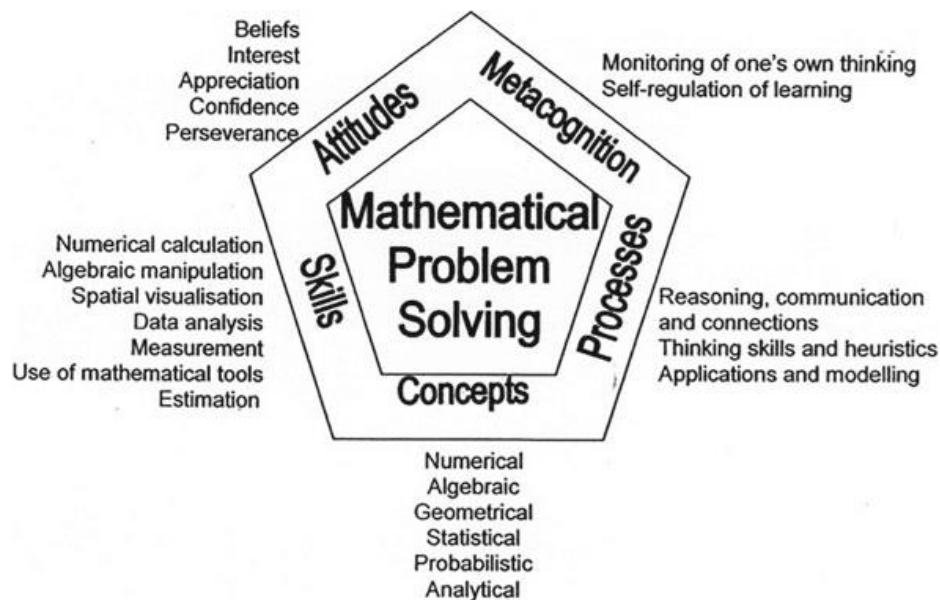
גם לתהליך הלמידה בסינגפור יש מבנה קבוע שמאפשר מעקב מתמיד אחר התקדמות התלמידים והשלמת פערים מהירה.



איור 4.1: מבנה תהליך הלמידה בסינגפור

התהליך מורכב משלושה שלבים (DSR – D-development, S-student work, R-review): מפגש עם חומרים חדשים (המורה מדגים, מציג או מדריך את התלמידים לקראת גילוי), עבודה של התלמידים ובקרה של המורה על עבודת התלמידים (איור 4.1, לקוח מתוך (Kaur, Tay, Tong, Toh, & Quek (2021), עמ' 51). שני השלבים האחרונים חוזרים על עצמם ותורמים להשלמת פערים.

המטרה העיקרית של תוכנית הלימודים במתמטיקה בסינגפור היא לקדם את התלמידים בפתרון בעיות מתמטיות, זאת תוך התייחסות לחמישה מרכיבים, שקשורים זה לזה, התומכים בהשגת המטרה: מושגים, מיומנויות, תהליכים, מטה-קוגניציה, ועמדות (ר' איור 4.2, לקוח מתוך (Lee, Ng, & Lim (2019), עמ' 38).



איור 4.2: המסגרת הקונספטואלית של תוכנית הלימודים במתמטיקה בסינגפור

כמו תוכנית הלימודים המיועדת, כך גם תוכנית הלימודים המיושמת בסינגפור מתוכננת בקפידה. פיתוח המשימות הלימודיות מבוסס על ניתוח מפורט של התכנים הלימודיים למרכיבים, על התייחסות למחקר המתאר קשיים של תלמידים בלמידת הנושאים השונים, ועל תכנון של מסלולי למידה בהם הידע הדרוש לתלמידים כדי לרכוש את המושגים והמיומנויות החדשים מצוי אצל התלמידים. מהלך השיעור מיועד לתרום לשימוש בידע קיים ולחיזוקו. יישום התוכנית מלווה במחקר, שהראה שהדגש העיקרי הוא על מיומנויות, ושתהליכי הנמקה והבנה מושגית מקושרים למיומנויות ולהסברים למתמטיקה שעומדת בבסיסן. הדגש על מיומנויות נעוץ בתרבות המזרח. יש לציין שברוח תרבות המזרח, בסינגפור המורה עדין הוא מקור הידע.

נקודה ייחודית בתוכנית הלימודים בסינגפור היא פיתוח חשיבה אלגברית כבר בגיל צעיר, בעת פתרון בעיות מספריות. על פיה, הדרך ללימוד האלגברה בחטיבת הביניים נסללת כבר בבית הספר היסודי. Yeo ושותפיו (2019) מתארים את האופן שזה נעשה בסינגפור, באמצעות שיטה שנקראת "שיטת המודל", שעונה על שני עקרונות פדגוגיים: בנייה של נושא באמצעים מוחשיים וויזואליים לפני המעבר למופשט (CPA), וחתימה לבניית ידע חדש ככל שניתן על בסיס ידע קיים והתנסויות קודמות (הגישה הספירלית). בבית הספר היסודי התלמידים לומדים לפתור מגוון בעיות מילוליות בעזרת מודל מוחשי-ויזואלי, ללא צורך בכלים אלגבריים (כגון סמלים פורמליים, משוואות). שיטה זו מאפשרת להחליק את המעבר לאלגברה באמצעות פתרון אלגברי לצד הפתרון בעזרת המודל, ואף באמצעות הכנסת משתנים לתוך האיורים של המודל. המעבר לאלגברה נעשה באמצעות בעיות שבהן התלמידים חשים שהפתרון באמצעות המודל הוא פחות יעיל ולכן עולה הצורך לדרך אחרת (זה עקרון חשוב בלמידה בכלל: The Necessity Principle). שיטת המודל מודגמת בנספח א'.

ספרי הלימוד במתמטיקה הינם בשפה האנגלית וצריכים לקבל אישור של משרד החינוך. אישור זה מבטיח, בין היתר, שהספר עולה בקנה אחד עם תוכנית הלימודים המיועדת ומטרתיה. לכן אפשר ללמוד על תוכנית הלימודים המיושמת בבתי הספר מספרי הלימוד המאושרים. Kaur et al. (2020) ניתחו פרק על גרפים של פונקציות לינאריות מתוך ספר הלימוד המאושר Discovering Mathematics (Chow, 2013), שלהערכתם משקף נאמנה את הגישה להוראת המתמטיקה בסינגפור.

הספר כולל דוגמאות ויזואליות, פעילויות כיתתיות, ודיאגרמות שאמורות לעזור לתלמידים לפתח הבנה של המושגים הרלבנטיים והיכולת ליישם אותם. ברוח המסגרת הקונספטואלית של תוכנית הלימודים, הספר מדגיש פתרון בעיות, תוך פיתוח הבנה פרוצדורלית וקונספטואלית (או בטרמינולוגיה של Skemp (1976), הבנה אינסטרומנטלית והבנה רלציונית). כל פרק מתחיל בפתיחה, וכולל: פעילויות כיתתיות; דוגמאות פתורות או כאלה שצריך להשלים את פתרונן, שנעות מיישום מידי בסיטואציות מחיי היומיום, ועד למשימות שמחייבות רמות חשיבה גבוהות (higher-order thinking).

4.2 הולנד

כאמור, יש בהולנד מסלולי לימוד שונים ובכל אחד נלמדת מתמטיקה אחרת מבחינת התכנים והמטרות. גם במסלול הגבוה (האקדמי), יש ארבעה תת-מסלולים של מתמטיקה. המתמטיקה היא חלק מתפיסה כללית של תת-המסלול והיא נבדלת מזו אשר במסלולים האחרים בתכנים ובמיומנויות המודגשות.

הגישה להוראת המתמטיקה בהולנד נשענת על משנתו של פרוידנטל ונקראת RME – Realistic Mathematics Education (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). גישה זו מבוססת על העקרונות הבאים:

- למידה פעילה: התלמידים פעילים בתהליך הלמידה, מפתחים כלים ותובנות בעצמם ("ממציאים לעצמם את המתמטיקה" – Reinvent).
- מתמטיקה ריאליסטית: הלמידה מתחילה מבעיות "מציאותיות", שההקשרים שלהן לקוחים מחיי היומיום או מעולם שהתלמידים יכולים לדמיין.

- התפתחות הדרגתית של רמות הבנה: למידת מתמטיקה כרוכה בפיתוח הדרגתי של רמות הבנה החל מפתרונות לא פורמליים בקונטקסט של הבעיה, עד לתובנות אודות קשרים בין מושגים לדרכי פתרון. בשלב

הראשון התלמיד יוצר מודל עבור משהו מציאותי, ובהדרגה המודל משמש לחשיבה מתמטית בעוד ועוד הקשרים.

ד. שילוב בין תחומים שונים במתמטיקה: מתמטיקה כמקצוע בית ספרי לא צריכה להיות מחולקת לתחומים. תחומי תוכן שונים (כגון, מספרים, גיאומטריה, מידה) צריכים להיות משולבים בפתרון בעיות ולא להיות מטופלים כפרקי לימוד נפרדים.

ה. מתמטיקה כעיסוק חברתי: לימוד מתמטיקה הוא פעילות חברתית.

ו. למידה מודרכת: מורים צריכים להנחות את הלמידה של התלמידים בצורה אינטראקטיבית ותוכניות הלימודים צריכות להישען על מסלולי הוראה-למידה קוהרנטיים וארוכי טווח.

יש שתי גישות מנוגדות שמתייחסות לדרך שבה מלמדים מתמטיקה (לא למתמטיקה שמלמדים). הגישה האחת גורסת שיש ללמד תחילה מתמטיקה ללא כל קשר לעולם האמיתי בתקווה שכאשר התלמידים יזדקקו למתמטיקה הם יידעו איך ליישם אותה. פרוידנטל וממשיכיו מחזיקים בדעה שגישה זו פסולה, מאחר ורוב התלמידים לעולם לא יחוו צורך להשתמש במתמטיקה שלמדו בבית הספר. הגישה השנייה גורסת שיש ללמד מתמטיקה יישומית. לגישה זו יש חסרון כי כשהקשר משתנה המתמטיקה מפסיקה להיות מועילה, וכבר לא יודעים איך להשתמש בה. בין שתי הגישות הללו פשרה אפשרית היא ללמד תחילה מתמטיקה טהורה ורק אחר כך ליישם אותה לבעיות בהקשר מציאותי. אולם לפי גישת ה-RME, הסדר צריך להיות הפוך: מתוך עיסוק בבעיות בהקשר מציאותי, לבנות כלים מתמטיים כלליים יותר (ר' דוגמה לגישה זו במשימה 8 בנספח ב'). הגישה בהולנד, שעל פיה לומדים מתמטיקה יישומית בהקשר, היא מסורת של מאות שנים, עוד לפני ה-RME.

ככלל, תוכנית הלימודים במתמטיקה בהולנד דגש על פיתוח חשיבה ופתרון בעיות מורכבות. על מנת לחזק את ההיבט הזה, החליטו בהולנד לקיים אולימפיאדות ארציות, אחת לשנה. ההשתתפות בתחרויות אלה אינה חובה. במסגרת האולימפיאדה, התלמידים עובדים בקבוצות של 3-4 תלמידים מאותו בית ספר כדי לענות על משימה הנטועה בהקשר חוץ-מתמטי. הבעיות הן מורכבות והתלמידים עובדים עליהן במשך יום שלם. ההכנה לתחרויות האלה, נעשית כחלק משיעורי המתמטיקה בבית הספר, מה שמחזק את המטרה העיקרית של פיתוח חשיבה.

אפשר להבחין בסוגים שונים של משימות מתמטיות בהתאם להקשר והקשר שלהן לעולם (Vos, 2020). מהניתוח של משימות מתמטיות בהקשרים שונים עולה, כפי שצינו כבר, כי דרושה מחשבה ותכנון מעמיקים כשבונים משימות לימודיות בהקשרים. בטבלה 4.1 מובאים הסוגים השונים לפי Vos.

Vos מתייחסת גם לקטגוריה נוספת, שהיא מכנה משימות עם הקשר אותנטי:

'Tasks with authentic contexts', in which the origin of the context is explained through convincing resources. In this category, also, the context justifies the question, and an answer is useful within the described context. (Vos, 2020, p. 40).

הכוונה היא למשימות שמלוות במקורות שתומכים בנתונים של ההקשר ובנוסף, כאלה שהשאלה שעליה התלמידים מנסים להשיב היא שימושית בתוך ההקשר. לפי Vos, אם הסיטואציה אינה אמينة ולא נראית אותנטית, הלומדים שפותרים את הבעיה מתייחסים אליה במשמעות של בעיה חשופה/מולבשת, ולא כאל בעיה בהקשר.

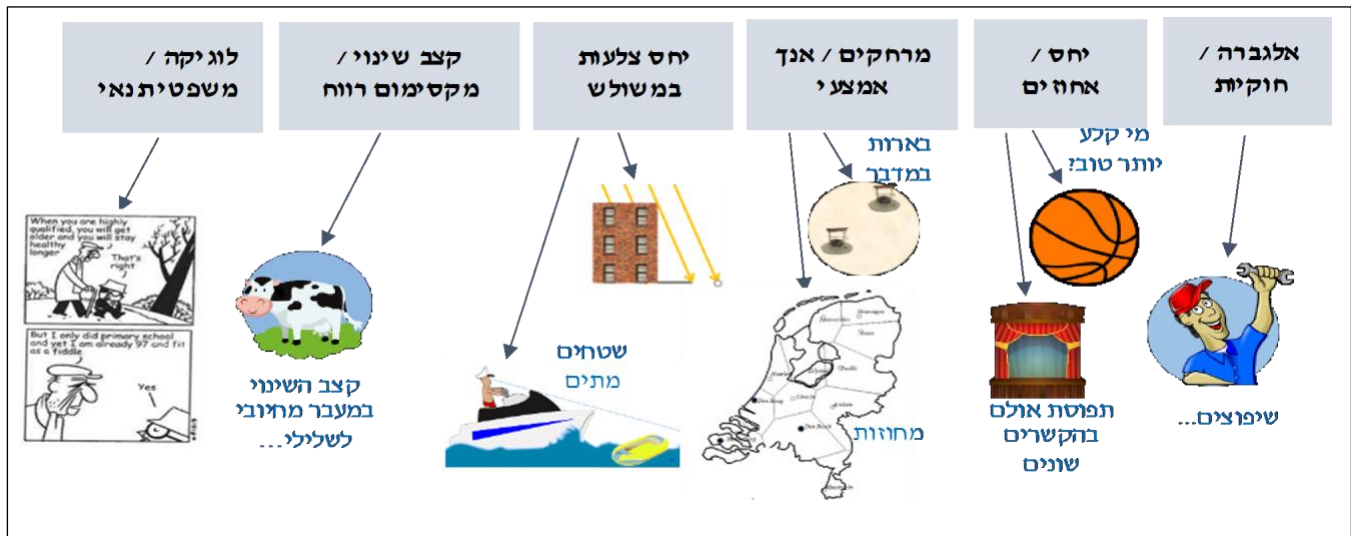
Vos מצאה שלא כל המשימות בספרי הלימוד ההולנדיים הן משימות בתוך הקשר. כשהיא מנתחת משימות מתוך פרק של ספר לימוד נפוץ לתלמידי כיתה י' היא מראה שרק חלק מהמשימות נטועות בתוך הקשר חוץ מתמטי, וגם המשימות הנטועות בתוך הקשר חוץ מתמטי הן לעתים משימות "מולבשות", שאין בהן מידע שמאפשר לתלמידים לזהבין מדוע חשוב לגלות את מה שהם מתבקשים לגלות. לדבריה, כשמסתכלים בפרק הלימוד כמכלול, החוט המקשר בין המשימות השונות הוא זה שמציף את החשיבות של הפעולות שעל התלמידים לבצע. חלק מההקשרים אכן משמשים אבני דרך בעזרתן מפתחים ומתרגלים את היכולות של התלמידים לבצע את הפעולות הנדרשות.

לדברי Vos, וגם על פי הבחינות שסקרנו, חלק גדול ממשימות הבחינה הן משימות מציאותיות (ריאליסטיות), וחלק ניכר מהן הן אמנם משימות אותנטיות. המבחנים בנויים כך שבכל הקשר שואלים יותר מאשר שאלה אחת כדי שלא יהיה עומס קריאה רב מידי על התלמידים בזמן הבחינה. Vos טוענת שלשאלות הבחינה יש השפעה גדולה על המשימות בהן עוסקים בפועל בשיעורי המתמטיקה.

תיאור ההקשר	סוג המשימה	תת-חלוקה	משימה לדוגמה	הערות
ללא הקשר משימות שמוצגות באמצעות סמלים מתמטיים מבלי לייחס להם משמעות	"משימות חשופות" Bare Tasks		$3\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$	
הקשר מהעולם האמיתי	"משימות מולבשות" נעדר בהן האספקט השימושי		כמה רבעי שעה יש בשלוש וחצי שעות? או כמה רבעי פיצה יש בשלוש וחצי פיצות?	כאן היחידות והחילוק מקבלים משמעות, אבל מהשאלה לא ברור למה לחלק את הפיצות או לשם מה חשוב לדעת כמה רבעי שעה יש בשלוש וחצי שעות.
	משימות שבהן ההקשר מדגיש את השימושיות	משימות ריאליסטיות בהקשרים שהתלמידים מכירים	במרכז רפואי ניתן לקבל ייעוץ בין 8:30 ל-12:30. אורך פגישת ייעוץ רבע שעה. כמה חולים אפשר לקבל לפגישות של רבע שעה?	כאן נוסף האספקט של השימושיות של המידע (usefulness), ובנוסף לכך המשימה היא מציאותית כי תלמידים בדרך כלל מכירים את הסיטואציה של תור לרופא.
		משימות שאפשר לדמיין	לחוקרים שמפליגים בים יש דלק לעוד שלוש וחצי שעות. כמה פעמים יצליחו לראות לווייתן בזמן שנותר להם, אם הוא עולה לנשום כל רבע שעה?	
הקשר מתמטי			תרגיל חילוק שברים יכול לבוא בהקשר גאומטרי מלונה בדיאגרמה שמראה את משמעות החילוק – ניתן ללוות אותן באיורים דמויי חפיסת שוקולד אפילו בלי להזכיר שמדובר בשוקולד	

טבלה 4.1 : סיווג משימות מתמטיות לפי ההקשר שלהן [מבוסס על Vos (2020)]

פיתוח משימות בהקשר משמעותי ואותנטי, שמעוררות ענין ומעמידות דרישות קוגניטיביות ברמה גבוהה, כרוך בניסיון רב, התמצאות, הבנה מתמטית, ויידע פדגוגי. עושר מרשים של נושאים מתמטיים שנלמדים במגוון של הקשרים והבעיות המעוגנות בהם בולט במיוחד בהולנד. בתרשים 4.3 מופיע רק חלק מהנושאים וההקשרים.



תרשים 4.3: דוגמאות של נושאים מתמטיים בהקשרים מחיי-היומיום מתוכנית הלימודים בהולנד

ספרי הלימוד בהולנד הם בשפה ההולנדית, אבל יש סדרת ספרי לימוד באנגלית, *Mathematics in Context*⁸, שנכתבה עבור תלמידי חטיבת הביניים בארה"ב ברוח הגישה ההולנדית של RME, ומשקפת אותה נאמנה. לצורך השוואה, נבחר פרק מקביל לפרק מספר הלימוד הסינגפורי, על גרפים של פונקציות ליניאריות (Kindt, 2010).

4.3 השוואה בין תוכנית הלימודים המיושמת בסינגפור ובהולנד

בסעיף זה מובאות שני סוגים של השוואות: האחד – השוואה בין ההצגה של נושא לימוד אחד בשני ספרי לימוד (מסינגפור ומהולנד), והשני – השוואה בין שני זוגות של משימות לימוד. בכל זוג אחת המשימות היא מסינגפור והשנייה מהולנד.

4.3.1 השוואה בין נושא לימוד אחד בשני ספרי לימוד שונים

השוואה של ההזדמנויות ללמידה והגישות להוראת המתמטיקה (Kaur et al., 2020) נעשתה על בסיס ניתוח של הפרק על גרפים של פונקציות ליניאריות בספרי הלימוד בסינגפור ובהולנד, בהתאם לשלושה קריטריונים:

1. רצף הצגת התכנים של הפרק
2. אופיין של הפעילויות הכיתתיות המוצעות
3. רמת המורכבות והדרישות הקוגניטיביות המצופות מהתלמידים

נביא להלן את ההשוואה לפי שלושה הקריטריונים הללו.

1. רצף הצגת התכנים של הפרק

שני ספרי הלימוד (בגישה של סינגפור ובגישה של הולנד) מציעים לתלמידים הזדמנויות לקשר מושגים מתמטיים לסיטואציות משמעותיות מחיי היומיום, לתרגל, לבצע הערכה עצמית, ולעשות רפלקציה על הלמידה שלהם. עם זאת, כל אחד מספרי הלימוד נוקט בדרך שונה לבנות את רצף ההוראה.

⁸ Wisconsin Center for Education Research & Freudenthal Institute (2010)

בספר הסינגפורי התלמידים לומדים את הנושא בצורה מובנית ושיטתית. המונחים הרלבנטיים לפרק (כמו, למשל, מערכת קואורדינטות קרטזית, ציר ה- x , ציר ה- y , ראשית הצירים, שיעורי ה- x וה- y) מוצגים בצורה ישירה, והמושגים הרלבנטיים לפרק נבנים מתוך פעילויות כיתתיות והתנסויות למידה. מכאן עוברים לדוגמאות פתורות ולאחריהן – תרגול בשלוש רמות: בעיות פשוטות הדורשות יישום ישיר ומיידי, בעיות יותר מאתגרות הדורשות יישום, ולבסוף – שילוב של בעיות מחיי היוםיום, מיומנויות חשיבה, וקשר לדיסציפלינות אחרות. הרצף הזה חוזר לכל תת-יחידה. בסוף הפרק יש סיכום, תרגילי חזרה, בעיות עם הקשר מחיי היוםיום שרלבנטי לנושא, ורפלקציה של התלמידים. באופן כללי, יישום המושגים המתמטיים לסיטואציות מחיי היוםיום מתרחש רק לאחר רכישת הידע הדרוש בכל תת-נושא, ורפלקציה נעשית רק בסיום הפרק כולו.

לעומת זאת, בספר ההולנדי, התלמידים לומדים את המושגים המתמטיים בצורה אינטואיטיבית במסגרת הקשר אחד מחיי היוםיום השזור לאורך הפרק כולו. הפרק מתחיל בהצגת סיטואציה מחיי היוםיום (במקרה זה, שריפה ביער), והתלמידים בונים את הידע החדש מתוך מגוון ייצוגים וקישורים ביניהם ועל בסיס ידע מיחידות קודמות. התלמידים מאמצים בהדרגה את אוצר המלים הפורמלי (הטרמינולוגיה המוסכמת) ואת דרכי הסימון המקובלים (Notation). התלמידים לומדים להשתמש באלגברה ככלי לפתרון בעיות שעולות מתוך העולם המציאותי, מהשלב שבו אינם משתמשים בייצוגים סימבוליים אלא מתעמקים בהבנת המושגים הרלבנטיים. היישום של מושגים מתמטיים לבעיות מחיי היוםיום נעשה בהדרגה תוך שהתלמידים רוכשים ידע בכל תת-נושא. כל תת-יחידה מסתיימת בסיכום ובשאלות הדורשות הערכה עצמית של התלמידים, ולאחריה רפלקציה נוספת.

2. אופיין של הפעילויות הכיתתיות המוצעות

בשני ספרי הלימוד הפעילויות הכיתתיות המוצעות מאפשרות לבנות את הידע המתמטי הדרוש מתוך חקירה וגילוי. בשניהם נעשה שימוש מושכל בכלים טכנולוגיים שתומכים בהתנסויות בלמידה אינטראקטיבית.

בספר הסינגפורי הפעילויות מובנות באופן שיטתי, כל אחת עומדת בפני עצמה וניתן לבצע אותה ללא קשר לפעילויות האחרות. אין הקשר אחד שמלווה את כל הפעילויות בפרק.

לעומת זאת, בספר ההולנדי, התלמידים מתוודעים תחילה לסיטואציה של גילוי שריפות ביער ממגדלים מיוחדים שנועדו לך. ההקשר הזה מלווה את כל הפעילויות בפרק. הפעילויות מחייבות את התלמידים ליישם ידע שכבר קיים אצלם לפני שהם לומדים את המושגים המתמטיים הפורמליים החדשים. הפעילויות יוצרות הזדמנויות לקשר בין המושגים החדשים לידע קודם בד בבד עם יישומים לחיי היוםיום.

3. רמת המורכבות והדרישות הקוגניטיביות המצופות מהתלמידים

בשני ספרי הלימוד מופיעות בעיות משני סוגים: הסוג הראשון הן בעיות שמכוונות לתזכורת של ידע ופיתוח מיומנויות. בעיות מסוג זה מאופיינות ע"י מילים כמו, "מצאו", "כתבו", "שרטטו". הסוג השני של בעיות מכוון לפיתוח חשיבה ברמה גבוהה. בעיות אלה מאופיינות ע"י מילים כמו, "הסבירו", "נמקו", "פרשו".

כאמור, בשני הספרים יש בעיות היוצרות הזדמנויות לתלמידים להתנסות בחשיבה ברמה גבוהה. בעוד שבספר בגישה הסינגפורית הבעיות מהסוג השני מעודדות תלמידים לעשות אינטגרציה של המידע שבידיהם, לבחור אסטרטגיות משלהם, ולהסביר איך פתרו את הבעיה, בספר בגישה ההולנדית, בנוסף לבעיות כמו אלה שמופיעות בספר בגישה הסינגפורית, יש גם בעיות המעודדות לנתח, לעשות סינתזה, ולפתח מודלים מתמטיים. בעיות אלה יכולות להיות: "מה הדרך הפשוטה ביותר ל...", "מה אם לא?", "האם אתם מסכימים עם...?", "איך תוכלו לדעת בבטחון ש...", "כתבו ופרטו את דרך החשיבה שלכם", "שתפו בשיטה שלכם". אפשר לומר שהפעילויות כיתתיות, הבעיות והדרכים לעורר רפלקציה אצל התלמידים בגישה ההולנדית משתרעים על טווח רחב יותר של שאלות ברמות חשיבה גבוהות, בהשוואה לספר בגישה של סינגפור.

לסיכום, נראה שככלל, המורים שמלמדים לפי הספר בגישה הסינגפורית מלמדים פתרון בעיות, תוך מעבר מהתוכן (המתמטי) ליישום, בעוד שמורים שמלמדים בגישה ההולנדית מלמדים את התוכן (המתמטי) דרך היישומים ופתרון בעיות.

4.3.2 השוואה בין שתי משימות מתמטיות בהקשרים דומים

ביטוי נוסף להיבטים משותפים ושונים לראות בהשוואה בין שתי משימות מתמטיות בהקשרים דומים – האחת מסינגפור והשנייה מהולנד. לשם כך, נתבונן בשתי המשימות הבאות (משימות 7 ו-10 בנספח ב'). שתיהן מזמנות התנסויות במציאת חוקיות וייצוגה בדרכים שונות.

הצעות מחיר לשיפוצים ביתיים (הולנד)

הצעות מחיר לשיפוצים ביתיים

גים הוא מומחה בשיפוץ בתים קטנים, שניתן לבצע בפחות מיום עבודה. במרבית עבודותיו הוא מעסיק צוות של 3 אנשים. הוא גובה 37 דולר עבור שעת עבודה ובנוסף 25 דולר הוצאות נסיעה.

- חשבו את המחיר של העבודות הבאות:
- החלפת צינורות אצל מר אשטון: 3 שעות.
- ניקוי הצינורות אצל **גרג** ושעות: 21-22 שעות.
- החלפת בריס בבית וונדר: 3-4 שעות

למעמים אנשים מבקשים מגים הצעות מחיר. לאור הניסיון הרב שלו הוא יודע להעריך כמה שעות ידרשו לכל תיקון ומשתמש בטבלה הבאה כדי להעריך את העלות.

מספר שעות העבודה	עלות העבודה (בדולרים)	עלות ההסעה (בדולרים)	עלות לעובד (בדולרים)	תשלום ל-3 עובדים (בדולרים)
1	37	25	62	186
2	74	25	99	297
3	111	25	136	408
4	148	25	173	519
5				

- א. מה מייצגות הכותרות של העמודות בשורה העליונה של הטבלה?
- ב. חוסיפו שורה בטבלה עבור 5 שעות עבודה.
- א. הסבירו את החוקיות בעמודה של העלות לעובד.
- ב. חקרו את הטבלה ורשמו כל חוקיות שאתם מגלים.
- א. בתרשים משמאל, סרטוט חיצים שגים היה יכול להשתמש בהם, על מנת לייצר יותר שורות של הטבלה.
- ב. השתמשו בדיאגרמת החיצים כדי להוסיף עוד שורות לטבלה עבור 6 ו-7 שעות עבודה.

לבנים לבניית קיר (סינגפור)

לבנים לבניית קיר

קבוצת פועלי בנין מלבנים קיר מלבנים. על מנת שהקיר יהיה יציב, צריך להניח את הלבנים בסידור מיוחד, כפי שמופיע בתמונה (משמאל):

תרגילים לחימום:

- רשמו את המספר הכולל של לבנים בכל אחד מהתיאורים הבאים – איור א' ואיור ב'.
- ערמה של לבנים מסודרת כמו באיור א'. בשורה העליונה יש 4 לבנים ובתחתונה 10 לבנים. כמה לבנים יש בסך-הכול בערמה הזאת?

הידעתם?

ערמה של לבנים מסודרת באופן שמספר הלבנים בכל שורה קטן באחד ממספר הלבנים בשורה מתחתיה. אם השורה העליונה מכילה p לבנים והשורה התחתונה מכילה q לבנים, אז אפשר לחשב את המספר הכולל של לבנים בערמה לפי הנוסחה:

$$(p + q) \cdot (q - p + 1) \div 2$$

השתמשו בנוסחה הזאת כדי לבדוק את תשובותיכם לשאלה 1 ושאלה 2.

- ערמה של לבנים מסודרת כמתואר קודם. ידוע שמספר הלבנים בערמה הוא 30, ומספר הלבנים בשורה העליונה הוא זוגי.
- ציירו את כל הסידורים האפשריים** ולכל סידור ציינו את מספר הלבנים בשורה העליונה ובשורה התחתונה. (רמז: אפשר להשתמש בנוסחה שהופיעה בסעיף הקודם).

איור 4.3: שתי משימות מתמטיות בנושא של מציאת חוקיות

חשוב לציין, שגם כשמובאת משימה כלשונה, עדין אין לנו יידע מספיק על האופן שבה היא מיושמת בכיתה ומוצגת לתלמידים. כך, למשל, במשימה מסינגפור (איור 4.3), שמשולבת במסגרת הערכה חלופית, לא ברור כמה זמן ניתן לתלמידים להשיב על השאלה הראשונה והשנייה, לפני שקיבלו מן המוכן את הנוסחה, שמאפשרת לפתור את מרבית חלקי המשימה בצורה פרוצדורלית. מה שברור הוא שיש הכוונה לשימוש בנוסחה, במקום או בנוסף לרעיונות פתוחים של התלמידים. אחת התוצאות היא ירידה מסוימת בדרישה הקוגניטיבית של המשימה, אף כי השימוש בנוסחה בסעיף 3 של המשימה כלל אינו טריוויאלי. לעומתה, במשימה ההולנדית לא רואים הדרכה הדרגתית מסוג זה. עם זאת שתי המשימות יוצרות הזדמנויות לחיפוש פתוח וחשיבה ברמות גבוהות. מטבלה 4.2 אפשר לראות דמיון רב בין שתי המשימות. ניתוח נוסף של כל אחת מהמשימות מופיע בנספח ב'.

המשימה מאפיינים	לבנים לבניית קיר (סינגפור)	הצעות מחיר לשיפוצים ביתיים (הולנד)
הנושא המתמטי העיקרי	מציאת חוקיות (בגיאומטריה)	מציאת חוקיות (באלגברה)
ההקשר מהעולם האמיתי	משמעותי, הגיוני	משמעותי, הגיוני
הצמחה לעומת יישום	בעיקר יישום	גם הצמחה
דרישה קוגניטיבית	יחסית גבוהה	גבוהה

טבלה 4.2: דמיון ושוני בין שתי משימות בהקשרים דומים

4.3.3 השוואה בין שתי משימות גיאומטריות

עוד ביטוי להיבטים משותפים ושונים בין הגישה להוראת מתמטיקה בסינגפור וזאת שבהולנד אפשר לראות בהשוואה בין שתי המשימות הגיאומטריות הבאות (משימות 8 ו-9 בנספח ב'). שתייהן מזמנות התנסויות שמובילות לעיסוק במרחקים ובתכונות של האנך האמצעי.

צמד פעילויות על מרחקים ואנך מקצועי (הולנד)

צמד פעילויות על מרחקים ואנך אמצעי

צמא במדבר

במפה מסומנות בארות. יש 5 בארות בסביבה. אתה צמא מאוד וכל מה שיש לך זו המפה הזאת.

1. לאיזו באר תלך?

2. סמנו את האזור שבאר מס' 2 היא הקרובה ביותר לכל הנמצאים בו.

מחוזות

באיור משמאל מוצגת חלוקה מחדשת של הולנד לפרובינציות.

3. איך נוצרו הגבולות של הפרובינציות? איך תוכלו למצוא אותם באמצעות קיפולי נייר?

4. איזו תכונה יש לשלוש הערים המודגשות במפה?

5. בכל אחד משני החלונות שמשמאל, הנקודות המסומנות מייצגות ערי בירה של פרובינציות. מצאו את גבולות הפרובינציות האלה.

6. הציעו סידור מיוחד של ערי בירה שיוכל לעוד סידור מיוחד של פרובינציות.

חקירת תכונות של מעגל עם קיפולי נייר (סינגפור)

חקירת מעגל עם קיפולי נייר

(משימה זו היא חלק מרצף משימות שאינן מופיע בבלוואו בנספח)

1. השתמשו באותו עיגול כמו [בשאלה קודמת] וקפלו אותו לאורך מיתר שאינו קוטר, ואז קפלו אותו לשני חלקים שווים כמודגם באיור.

2. פתחו את הקיפול כמודגם באיור שמשמאל. קווים מרוסקים מציינים קווים שנוצרו מקיפולי נייר.

3. כשנייר מקופל לשני חלקים שווים, הישר / חוצה את המיתר AB ואת הזווית $\angle AMB$. מכיוון ש- $\angle AMB = 180^\circ$, הישר l מאונך למיתר AB.

א. איזה מהתנאים [המנייה לעמוד קודם עם רשימת תנאים] מתקיימים?

ב. האם הישר l עובר דרך מרכז המעגל שסימנת בשאלה 5 [קודמת]?

איור 4.4: שתי משימות גיאומטריות שעוסקות במרחקים ואנך אמצעי

המשימה מסינגפור היא חלק מרצף של משימות (לא כולן מופיעות כאן), ואילו המשימה מהולנד בנויה מצמד פעילויות. שתי המשימות כוללות מציאת אנך אמצעי לקטע באמצעות קיפולי נייר.

בטבלה 4.3 מוצגת השוואה בין שתי המשימות. כפי שעולה מהטבלה, יש מאפיינים משותפים לשתי המשימות, שכולם בעלי ערך. מטבע הדברים יש גם הבדלים בין המשימות, ולא כל ההבדלים מצביעים על הבדלי גישה בחינוך המתמטי. לכן כללנו בטבלה רק הבדלים אחדים שמבטאים בעינינו מאפיינים של הוראת המתמטיקה בכל מדינה. מהטבלה משתקפים שני עקרונות חשובים בתוכנית הלימודים בסינגפור: הבנייה של רצף לימודי מהקונקרטי, לצורכי, למופשט; ודאגה לכך שבכל שלב של הלימוד יהיה לתלמידים הידע הדרוש כדי לפתור בעיות שניתנות להם (מאפיינים 6 ו-7 בטבלה). בטבלה משתקפים גם שני עקרונות חשובים בתוכנית הלימודים בהולנד: יציאה מבעיה המעוגנת בהקשר מציאותי חוץ-מתמטי, וממנה להצמיח מושגים וכלים מתמטיים; שילוב במשימה שאלות פתוחות שמעוררות את התלמידים לחקור מעבר למצב הנתון (מאפיינים 8 ו-9 בטבלה).

מאפיינים	המשימה	חקירת מעגל עם קיפולי נייר (סינגפור)	צמד פעילויות על מרחקים ואנך אמצעי (הולנד)
(1) בעיה לא מוכרת לתלמידים (לפחות בהתחלה)		✓	✓
(2) התלמידים פעילים בתהליך הלמידה		✓	✓
(3) יש שימוש בעזרים מוחשיים (קיפולי נייר)		✓	✓
(4) המשימה בנויה מסדרה של בעיות הקשורות זו לזו		✓	✓
(5) עידוד לגילוי תופעות/תכונות בעלות משמעות, מעניינות ומעוררות מוטיבציה		✓	✓
(6) הבנייה של רצף: קונקרטי, ציורי, מופשט (CPA)		✓	
(7) הבטחה שבכל שלב, הידע הדרוש לתלמידים לפתרון יהיה באמתחתם		✓	
(8) מתחילים בפתרון בעיה מציאותית מחוץ לעולם המתמטיקה			✓
(9) הרחבת המשימה בגישת "מה אם לא?" באופן שמזמין את התלמידים לחקור מצב חדש מיוזמתם			✓

טבלה 4.3: השוואה בין שתי משימות בהקשרים דומים

4.4 פולין⁹

ההחלטה לבחון מחדש את תוכנית הלימודים במתמטיקה בפולין נבעה משלוש סיבות עיקריות:

- השינוי במבנה מערכת החינוך בפולין כלל פתיחת בתי ספר חדשים ומתן חופש בחירה לכל בית ספר. כתוצאה מכך, בחלק מבתי הספר שמרו על מסורת ההוראה הקודמת והמוכרת וכיוונו לדרישות המינימליות של הבחינה המסכמת.
- הרצון להבטיח עתיד טוב יותר הביא לעלייה מאסיבית במספר הסטודנטים במוסדות להשכלה גבוהה (כמחצית משכבת הגיל, כיום). בהתאם, חלחלה בציבור ההכרה בחשיבותו של חינוך איכותי בבית הספר כתנאי כניסה להשכלה הגבוהה. כיום 80% מהתלמידים בשנתון בוחרים בתיכון עיוני (בהשוואה ל-50% בימי טרום הרפורמה). כתוצאה מכך, ההטרוגניות בקרב תלמידי התיכון גברה, הן מבחינה סוציו-אקונומית והן מבחינת הכישורים, ובאופן ישיר צץ גם הפער בין חט"ב השונות בהתייחס לרמת הידע והמיומנויות שהקנו לתלמידיהם. הצורך בהנחיה אחידה ומעקב מדוקדק אחר הישגי הלמידה הפך קריטי.
- פתיחת השוק האירופאי לכלל אזרחי אירופה העלתה צורך במנגנון להשוואה בין כשירויות ויכולות של עובדים ולומדים ממדינות שונות. כמענה לצורך הזה, הוגדרה מסגרת אירופאית ללימודים והכשרה מקצועית, (EQF – European Qualification Framework), לפיה כל המוסדות המורשים להעניק הכשרה (למשל, בתי ספר) נדרשים להגדיר אותה במונחים של ביצועים (ידע, מיומנויות, וכשירות חברתית).

⁹ סעיף זה לקוח ברובו מדו"ח הסיור הלימודי בפולין, מטעם קרן טראמפ

בנסיבות אלה הוחלט לבנות תוכנית לימודים לאומית חדשה, שתיתן מענה לצרכים החדשים. לשם כך, צוות מומחים עסק בניתוח מעמיק של ביצועי התלמידים במבחן פיזה משנת 2003, בו הישגי התלמידים היו חלשים, במגמה למפות את נקודות החוזק והחולשה של תלמידי פולין. תוצאות הניתוח הצביעו על כך שבתחום המתמטיקה תלמידי פולין שולטים היטב בפתרון משוואות אבל מתקשים מאד בפתרון בעיות לא מוכרות. נמצא שתלמידים השאירו דפים ריקים כשנתקלו בשאלות לא מוכרות, כי לא האמינו ביכולתם להצליח. לאור זאת, הוחלט על תוכנית לימודים שתחזק את פיתוח יכולות החשיבה, ההבנה ופתרון בעיות. לצורך כך, התוכנית פותחה תוך הבחנה ושילוב בין ידע למיומנויות בכל אחד מהנושאים ורמות הלימוד, ותוך שמירה על עקביות וקוהרנטיות בין רכיביה השונים: מטרות הלמידה, תוצאות הלמידה המצופות, דרכי ההוראה, חומרי הלמידה, הכשרת המורים ותוכנית ההיבחנות. היה צורך למצוא את האיזון בין הדרישה לכלול הרבה מושגים וידע לבין המשקל הגדול שניתן בתה"ל החדשה למיומנויות הנמקה (reasoning) וטיעון (argumentation). האתגר בתהליך היה למצוא משימות שיעוררו את התלמידים להסביר את הטיעונים שלהם, ולהגדיר כיצד להעריך יכולות אלו.

תוכנית הלימודים בנויה משתי שכבות. "שכבת בסיס" שבה לכל שכבת גיל מתוארת המטרה העיקרית בהוראת המתמטיקה באותה שכבה באמצעות דרישות כלליות. למרות ההחלטה לשלב בעיות אורייניות הקשורות לעולם האמיתי, הן לא הפכו להיות הדגש העיקרי בתוכנית הלימודים. התכנים המבוססים על חשיבה מופשטת נשארו בתוכנית, לצד שילוב משימות הקשורות לעולם האמיתי ומשימות מפתחות חשיבה. ההנחיות מבהירות כי פיתוח מיומנויות צריך להיות המטרה הראשית של תהליכי ההוראה וההערכה. בנוסף, יש שכבה מורחבת הכוללת דרישות מפורטות לכל נושא המתארות מה התלמידים צריכים להשיג (תוצאות למידה מצופות) בלשון אופרטיבית.

כאמור, תוכנית הלימודים גם מפרטת את דרישות ההיבחנות, מתוך הכרה בכך **שבאמצעות המבחנים אפשר להשפיע על יישום מטרות תוכנית הלימודים**. כך, למשל, כל בחינה במתמטיקה חייבת להכיל בעיה המחייבת להפעיל שיקולים, תוך העלאת טיעונים והנמקות. כמו כן, כחלק בלתי נפרד מתוכנית הלימודים וממערך המבחנים, משולבות בעיות לא שגרתיות (non-routine) מהחיים, שאינן מוכרות לתלמידים, ודורשות חשיבה אסטרטגית מעבר לידע פרוצדורלי. בתוכנית משלבים שאלות שמקושרות למציאות ולצד זה ממשיכים ללמד מתמטיקה גם ללא הקשר מציאותי.

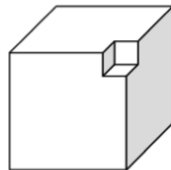
הרפורמה לא שינתה את התכנים שנכללו בתוכנית הלימודים במתמטיקה אלא רק את המיומנויות שנבנות ומיושמות בהקשר של אותם נושאי תוכן. למטרה זו נלוותה מטרה נוספת – להחליף את גישת "מסירת הידע" בגישה פדגוגית של "למידה פעילה". שתי המטרות חייבו להציב את התלמידים במוקד ולהתאים את התוכנית החינוכית לצרכיהם. בתי הספר התבקשו לבנות לעצמם את רצף הלמידה ודרכי ההוראה בהתייחס למסגרת הכללית שהוגדרה מראש, תוך איזון בין שלשה ממדים חינוכיים: רכישת ידע, פיתוח מיומנויות, וגיבוש עמדות. הרפורמה בתוכנית הלימודים נועדה גם לשנות את פילוסופיית ההוראה ולשפר את התרבות המקצועית של בתי הספר.

כפי שטענו לא פעם, אפשר ללמוד רבות ממשימות לימוד ומשימות היבחנות. הן משקפות גישות והדגשים בתוכנית הלימודים ותוצאות מצופות מהתלמידים. בנספח ב' מופיעות שלוש משימות (1,2,3) מתוך מבחנים לכיתה ח בפולין. בחרנו להביא שתיים מהן גם בפרק הזה, כדי להדגים איך מטרות העל של התוכנית מיושמות הלכה למעשה. הן תשרתנה גם את הפרק על מערך ההיבחנות (באמצעות הפניה לכאן).

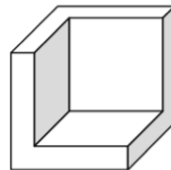
המשימה באיור 4.5 היא משימה גיאומטרית לא מוכרת לתלמידים, שאין לתלמידים אסטרטגיית פתרון ידועה מראש. המשימה דורשת התבוננות מאתגרת בשרטוט תלת-מימדי, שעלול להיות מתעתע. למרות ששטח הפנים של שני הגופים הוא אותו הדבר, קשה מאד להבחין בכך. במונחים של טבלה 4.3, מאפיינים 1, 2, 5 שהיו משותפים לשתי המשימות של סינגפור ושל הולנד, מתקיימים גם לגבי המשימה הזאת: בעיה לא מוכרת לתלמידים (1), התלמידים פעילים בתהליך (2), עידוד לגילוי תופעות/תכונות בעלות משמעות, מעניינות ומעוררות מוטיבציה (5).

שטח פנים

מכל אחת משתי קוביות זהות הוסרה קובייה והתקבלו הגופים המוצגים באיור הבא :



גוף 1



גוף 2

האם שטח הפנים הכולל של גוף 1 גדול משטח הפנים הכולל של גוף 2?

בחרו A (כן) או B (לא) ובחרו באחד הנימוקים 1, 2 או 3

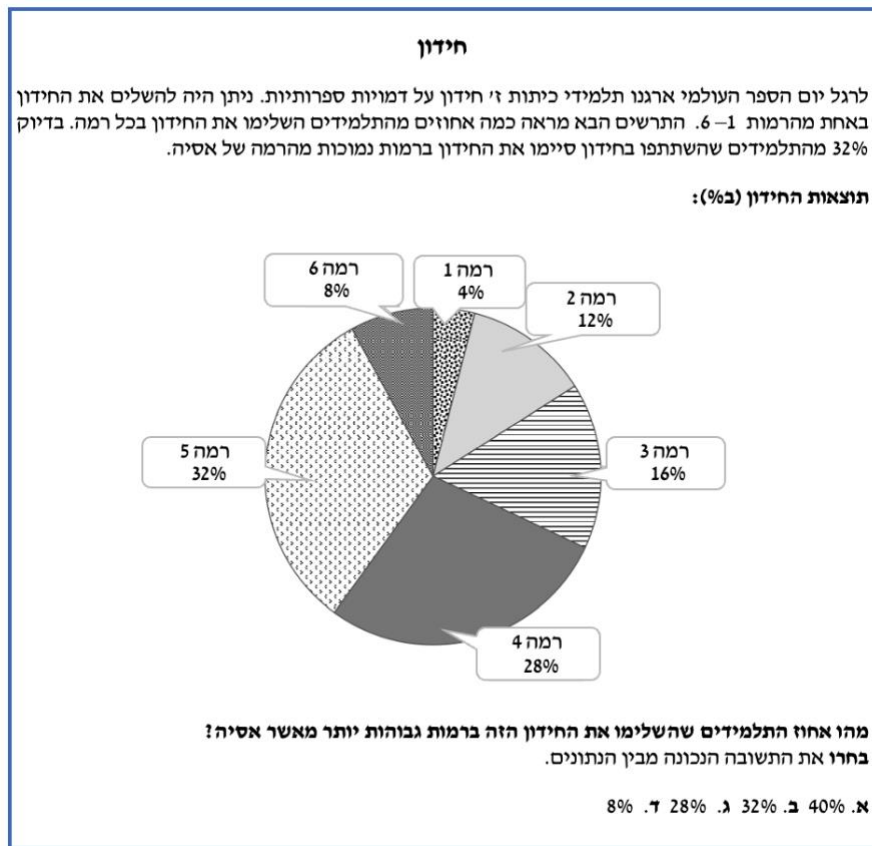
1.	הקובייה הראשונה הייתה קטנה מהקובייה השנייה.	כי	כן	A
2.	שטח הפנים הכולל של כל אחד מהגופים שהתקבלו שווה לשטח הפנים הכולל של הקובייה הראשונה.			
3.	שטח הפנים של "השקע" בקובייה השנייה (גוף 2) גדול משטח הפנים של "השקע" בקובייה הראשונה (גוף 1).		לא	B

תרשים 4.5 : משימה גיאומטרית מתוך מבחן לכיתה ח בפולין (נספח ב, משימה 3)

המשימה שבתרשים 4.5 היא דוגמה למשימה במתכונת סגורה, היא בנויה בדומה לשאלות "רב-בחירה" (multiple choice), אך בצורה מתוחכמת. התלמידים צריכים לבחור בשני שלבים באפשרויות מתוך רשימה נתונה, כשהדגש הוא על הנמקה. כדי להגיע לתשובה הם צריכים לעבור תהליכי חשיבה מעמיקים. למרות שההיגד בנימוק 2 הוא נכון, זה עדין לא אומר שהוא נכון כנימוק למי שסבור ש-A היא התשובה הנכונה בשלב הראשון.

המשימה באיור 4.6 היא בעיה לא שגרתית שאינה מוכרת לתלמידים, ושעל פניה נראית פשוטה, למרות שהיא דורשת חשיבה כדי להבין מהיכן להתחיל. השאלה עוסקת באסיה, אך אסיה כלל לא נזכרת בנתונים. קודם כל צריך להבין שצריך לחבר את האחוזים מהרמה הנמוכה ביותר (שצריך לאתר בדיאגרמה) כדי להבין מיהן הרמות מתחת לאסיה, ואז להוסיף את אחוז התלמידים ברמה הבאה, שהיא הרמה של אסיה, ולבסוף להשלים ל-100% או לחבר את האחוזים ברמות שנותרו. המסיחים בשאלה משקפים דרכי חשיבה שגויות שתלמידים עלולים להיתפס אליהן.

אמנם נתוני הבעיה מוצגים בצורה די מלאכותית שאינה תואמת את הדרך המקובלת להצגת נתונים בסיטואציה כזאת, ובכל זאת רמת החשיבה הנדרשת הינה גבוהה כי נדרש חיפוש פתוח. במונחים של טבלה 4.3, מאפיינים 1, 2, 5 שהיו משותפים לשתי המשימות של סינגפור ושל הולנד, מתקיימים גם לגבי המשימה הזאת. בעיה זו מדגימה את המאפיינים העיקריים של תוכנית הלימודים בפולין – **למידה פעילה תוך שילוב בעיות שמצריכות חשיבה, כאלה שלא מוכרות לתלמידים.**



תרשים 4.6: משימה חישובית מתוך מבחן לכיתה ח בפולין (נספח ב, משימה 2)

4.5 סיכום

■ **קישור לחיי היומיום.** בכל תוכניות הלימודים שסקרנו, יש התייחסות להתבוננות בעולם בעין מתמטית כמרכיב חשוב בלימוד המתמטיקה בבית הספר, בעיקר ע"י יישום של כלים ועקרונות מתמטיים שכבר נלמדו לסיטואציות מחיי היומיום. בסינגפור, הגישה הרווחת היא לצאת מהעולם המתמטי וליישם מידי פעם את העקרונות המתמטיים בבעיות מציאותיות. נראה כי פעילויות שיוצאות מסיטואציה מציאותית ומתוכה בונים כלים מתמטיים קיימות בעיקר בהולנד, שם הן מהוות חלק אינטגרלי מתוכנית הלימודים ומעוגנות בעקרונות של RME. גם בחומרים הנלווים לתוכנית הלימודים לחטיבת הביניים בישראל קיימים אוספים זמינים של בעיות אורייניות, שמעצם טבען מקשרות בין סיטואציות מהעולם המתמטי לסיטואציות מהעולם החוץ-מתמטי. **השאלה היא באיזו מידה ובאיזה אופן מיושמות משימות כאלה בלימוד המתמטיקה בחטיבת הביניים בארץ.**

■ **דגשים בתוכנית הלימודים במתמטיקה.** בכל אחת מהמדינות מייחסים חשיבות לפיתוח חשיבה ברמות גבוהות. כמו כן, לכל אחת מהמדינות יש מאפיינים ייחודיים. בסינגפור שמם דגש על שליטה במיומנויות כבסיס לפתרון בעיות; הם מקפידים על רצף לימודי מהקונקרטי, לצורכי, עד למופשט; כמו כן, דואגים לכך שבכל שלב של הלימוד יהיה לתלמידים הידע הדרוש כדי לפתור בעיות שניתנות להם. בהולנד יוצאים מבעיה המעוגנת בהקשר מציאותי חוץ-מתמטי, וממנה מצמיחים מושגים וכלים מתמטיים; בנוסף, משלבים במשימה שאלות פתוחות שמעוררות את התלמידים לחקור מעבר למצב הנתון. בפולין מכינים את התלמידים להתמודד עם בעיות שאינן מוכרות להם, שאפשר לפתור בהיגיון פשוט או בכלים מתמטיים שכבר מצויים בידי התלמידים.

■ **שיטת המודל.** שיטת המודל שמיושמת בסינגפור בבית הספר היסודי מעוררת השראה (ר' נספח א'). זוהי שיטה מובנית לזרוע זרעים לקראת המשך הלימודים בכיתות גבוהות יותר. למעשה, השיטה סוללת בהדרגה

זסלבסקי, רון, וזדיק: ניתוח השוואתי של מערך לימוד המתמטיקה במדינות בעלות הישגים גבוהים במבחני פיזה, נובמבר 2022

את הדרך ללימוד האלגברה, תוך שהיא מבססת אצל הילדים הבנה של מושגים חשובים כמו מושג היחידה. השאלה אם השיטה מתאימה ועוזרת לכולם, ואם ניתן לאמץ את הרעיון הגדול לנושאים אחרים בתוכנית הלימודים.

5. המורים למתמטיקה: הכשרה והתפתחות מקצועית

5.1 סינגפור

נקודת המוצא בהשקעה בהכשרה ובהתפתחות המקצועית של המורים למתמטיקה בסינגפור היא האמונה שהגורם המרכזי להצלחת החינוך המתמטי הוא איכות המורים, ושאיכות המורים קשורה לאיכות הכשרתם והתפתחותם המקצועית לאורך השנים (Toh et al., 2019). המבנה של ההתפתחות המקצועית זכה לשדרוג עם השנים והוביל לשיתוף פעולה בין המורים בשטח לבין חוקרים מהמכון הלאומי לחינוך. שיתוף הפעולה ההדוק מאפשר תיקוף ושיפור מתמיד של איכות התוכניות להתפתחות המקצועית. תוכניות אלה מושתתות על בסיס תיאורטי איתן ומושפעות ממה שעולה מהשטח.

הכשרת המורים למתמטיקה בסינגפור נעשית בבית ספר מרכזי אחד לחינוך (Tay et al., 2019). היא כוללת הכשרה בתחומי המתמטיקה, פדגוגיה, ונושאי חינוך כלליים. התוכנית להכשרת המורים מדגישה 6 מרכיבים עיקריים: תוכן, קוגניציה, פתרון בעיות, חישוב, תקשורת ועמדות. לימודי ההוראה מתוכננים כך שכל קורס יכול, לצד נושאי התוכן הייחודיים לקורס, לפחות שניים ממרכיבים אלה. הכשרת המורים מלווה במחקר הכולל מעקב אחר ביצוע מטלות שונות וגם ראיונות עם פרחי ההוראה. לפרחי ההוראה שתחום ההתמחות המקורי שלהם אינו מתמטיקה יש תוכנית הכשרה מיוחדת.

כל מורה בסינגפור מחויב במאה שעות של התפתחות מקצועית בשנה, כחלק בלתי נפרד ממשרת ההוראה שלו (Kaur et al., 2019). המורים יכולים לבחור בדרכים שונות של התפתחות מקצועית, החל מלמידה לקראת תארים גבוהים יותר ועד תוכניות מגוונות להתפתחות מקצועית. קיימים שלושה מודלים מרכזיים להתפתחות מקצועית של מורים למתמטיקה:

א. מודל היברידי המשלב סדנאות למידה פעילות עם הדרכה בבית הספר על ידי מנחים מהאקדמיה.

כל סדנה נמשכת שנתיים, במסגרתה מושם דגש מרכזי על התאמת התכנים לצרכים שעולים מהשטח. ההצטרפות לתוכנית היא קולקטיבית – המורים המשתתפים הם מאותו בית ספר, או שייכים לפרויקט משותף שנוסד בעקבות הכנסה של יוזמה חינוכית חדשה. יוזמות חדשות (כמו "למידה לשם הבנה", "שילוב מטה-קוגניציה בהוראה", "שילוב הטכנולוגיה בהוראה") תמיד מלוות בהכשרה של המורים, הכוללת ליווי שלהם בהוראה. דוגמה נוספת לנושא מרכזי של תוכנית התפתחות מקצועית היא שילוב תהליכי מידול בהוראה.

ב. כיתות מעבדה (השתלמות בסגנון Lesson Study)

ג. רשת של קהילות מורים לומדות המאפשרות למורים יותר בעלות על הלמידה של עצמם.

ישנם שלושה סוגים עיקריים של קהילות מורים: קהילות מבוססות תוכן, קהילות שצומחות באופן ספונטני על ידי קבוצות מורים בעלי עניין משותף, וקהילות של בעלי תפקידים. חלק מהפעילויות בקהילה כולל בניית מערכי שיעורים ושיפור שלהם באמצעות משוב עמיתים, צפייה משותפת בשיעורים של עמיתים ועוד.

במסגרת ההכשרה והתמיכה במורים הם לומדים להתייחס גם להיבט הרגשי של התלמידים, כפי שמופיע באחת הצלעות במסגרת הקונספטואלית (איור 4.2), ובפרט לטיפול גישה חיובית של התלמידים ביחס למתמטיקה. זאת בדרכים הבאות:

- בניית הביטחון של התלמידים ביכולת המתמטית שלהם על ידי התחלה עם משימות פשוטות שיספקו חוויית הצלחה והתקדמות הדרגתית למשימות מורכבות יותר.

- עידוד התלמידים להתמיד ולהצליח במתמטיקה.
 - טיפוח אצל התלמידים הערכה כלפי השימושיות של המתמטיקה, על ידי שילוב בעיות מציאותיות ויישומים.
 - יצירת עניין במתמטיקה על ידי שימוש במקורות שונים: קטעי סרטים מהנים, בדיחות, סיפורים.
- מעניין לציין כמה מאפיינים סביבתיים ותרבותיים בסינגפור שמשפיעים על ציבור המורים ועבודתם:
- קיים אמון של האוכלוסייה ושל המורים בהנהגה. הדעה הרווחת היא שההנהגה הובילה את סינגפור - ארץ ללא משאבי טבע למדינה עצמאית ומפותחת טכנולוגית, ולכן היא ראויה לאמון.
 - לא מדובר בקבלה עיוורת של הנחיות אלא בהתייחסות אליהן ביתר פתיחות בגלל האמון.
 - האמון הוא הדדי. למרות שתוכנית הלימודים מחייבת, ניתן כבוד לדעות של המורים והם משפיעים על החלטות לגבי תוכנית הלימודים ויישומה.
 - האוכלוסייה דוגלת במצוינות כערך חברתי חשוב. מקובל לומר: "בסדר זה לא מספיק טוב".

5.2 הולנד¹⁰

יש בהולנד מסלולי הכשרה שונים לקבלת תעודת הוראה במתמטיקה. ההכשרה יכולה להתבצע בשני מוסדות שונים: אוניברסיטה או מכללה להכשרת מורים (במינוח ההולנדי אוניברסיטה למדע שימושי HBO). המסלול במכללות הוא הנפוץ ביותר. ההבדלים העיקריים בין שני המסלולים הם:

- תנאי הקבלה למכללה פחות נוקשים מאשר לאוניברסיטה; בוגרי מסלולי לימוד נמוכים יותר בבית הספר העל-יסודי יכולים להתקבל למכללה אך לא לאוניברסיטה.
- מסלול ההכשרה באוניברסיטה מספק בסיס איתן יותר במתמטיקה מופשטת.
- לאוניברסיטאות יש תוכניות לימודים נפרדות למתמטיקה ולדידקטיקה, בעוד שבמכללות לימודי המתמטיקה והדידקטיקה משולבים.
- גישת RME ועקרונותיה (ר' סעיפים 4.2 ו-4.3) מהווים חלק מכל התוכניות להכשרת מורים למתמטיקה בהולנד, אבל ההדגשים והמינון שונים בתוכניות ההכשרה השונות.

המכללות מציעות מסלול לימודים 4-שנתי לתואר ראשון שמזכה ברישיון הוראה מדרגה שנייה. רק למחצית מהמכללות בהולנד (6 מתוך 12) יש גם תוכנית לתואר שני המזכה ברישיון הוראה מדרגה ראשונה. תנאי לקבלה לתוכנית זאת היא רישיון הוראה מדרגה שנייה וניסיון הוראה בבית ספר על-יסודי. במלים אחרות, תוכנית זאת מאפשרת קידום למורים בעלי רישיון הוראה מדרגה שנייה. ואכן, מורים רבים ממשיכים ללמוד בתוכניות הכשרה נוספות כדי לקבל רישיון הוראה מסוג גבוה יותר.

האוניברסיטאות מציעות שלושה מסלולים שונים (השניים האחרונים נוספו רק בעשור האחרון, כמענה למחסור בכוח הוראה): (i) מסלול זה נועד למי שיש כבר תואר שני במתמטיקה או במקצוע קרוב, ובנוי מתוכנית של שנה שבסיומה הבוגרים מקבלים רישיון הוראה מדרגה ראשונה; (ii) חמש אוניברסיטאות מציעות תוכנית דו-שנתית לתואר שני שכוללת, בנוסף ללימוד מקצועות במתמטיקה, גם היבטים תיאורטיים ומיומנויות מעשיות במסגרות חינוכיות פורמליות ולא פורמליות. בסיום התוכנית הבוגרים מקבלים תואר שני ורישיון הוראה מדרגה ראשונה; (iii) מסלול נוסף באוניברסיטה מציע תוכנית תלת-שנתית לתואר ראשון במתמטיקה בצרף תוכנית משנית (Minor) בחינוך, שנמשכת שנה וחצי. מסלול זה מזכה ברישיון הוראה מדרגה שנייה. רק לאחרונה הוחלט שכדי להתקבל להוראה, מורים צריכים לעבור מבחן ארצי במתמטיקה.

למוסדות המכשירים את המורים להוראת מתמטיקה קשר הדוק עם בתי הספר, וחלק מהכשרת המורים מתרחש בתוך בתי הספר, כשאחד הדגשים המרכזיים בחלק זה של ההכשרה הוא רפלקציה של המורים על עבודתם במגוון דרכים (וידיאו, סימולציה של סיטואציות באמצעות פרחי הוראה עמיתים) וביחס להיבטים

¹⁰ הסעיף הזה מבוסס על: Daemen et al., 2020

רבים של פעולות של המתלמידים בבית הספר (הצגת מושג חדש, תכנון שיעור, תכנון רצף שיעורים, תמיכה בתלמידים במהלך שיעור וכיו"ב).

בדומה לסינגפור, גם בהולנד מאמינים שהצלחת התלמידים קשורה קשר הדוק לאיכות המורים, ומייחסים חשיבות להתפתחות מקצועית מתמדת של המורים:

"...life-long learning skills are an important perspective in the curriculum. Therefore, institutions for teacher education tend to focus more and more on 'on the job' education of in-service teachers" (Daemen et al., 2020, p. 152).

החובה להבטיח את איכות המורים מוטלת על בתי הספר. לשם כך, בתי הספר מנהלים מעקב שוטף אחר כל מורה, והפיקוח אחראי לביצוע בקרת איכות של בתי הספר ומדווח לממשל. בנוסף, מוטלת על בתי הספר החובה לדאוג להתפתחותם המקצועית המתמדת של המורים. עד לפני כמה שנים אִפְּשָׁרוּ אֶךְ לֹא חִיבּוּ אֶת הַמּוֹרִים להשתתף בתוכניות להתפתחות מקצועית, אולם כיום על כל מורה חלה חובה, לפי חוק, להשתתף בפעילויות של התפתחות מקצועית במשך כל שנות עבודתו, בהיקף של 40 שעות בשנה (Daemen et al., 2020). מתוך 40 השעות הללו, על המורים למתמטיקה להקדיש לפחות 10 שעות לפעילויות שמעוגנות במתמטיקה. יש מסגרות שונות, כולל האוניברסיטאות, שמציעות קורסים מיוחדים למורים, על מנת להכין אותם לדרישות מקצועיות בעתיד. המורים בהולנד מקדישים זמן רב להכנה משותפת של חומרי למידה. אנחנו רואות בכך נדבך נוסף של התפתחות מקצועית.

חשוב לציין כי למוסדות המכשירים את המורים להוראת מתמטיקה קשר הדוק עם בתי הספר. חלק מהכשרת המורים מתרחש בתוך בתי הספר, כשאחד הדגשים המרכזיים בחלק זה של ההכשרה הוא רפלקציה של פרחי ההוראה על עבודתם במגוון דרכים (וידאו, סימולציה של סיטואציות באמצעות פרחי הוראה עמיתים) ובייחוד להיבטים רבים של הפעילות שלהם בבית הספר (כגון, הצגת מושג חדש, תכנון שיעור, תכנון רצף שיעורים, ותמיכה בתלמידים במהלך שיעור).

5.3 פולין¹¹

בדומה להשלכות על המורים למתמטיקה בישראל בשנות השבעים, בעקבות המעבר לחטיבות ביניים, גם בפולין מרבית מורי חטיבת הביניים הגיעו מבתי הספר היסודיים שהצטמצמו בהיקף שנות ההוראה. המעבר לחטיבה חייב הכשרה נוספת, כשדרוג למוסד יוקרתי יותר, לחינוך על-יסודי. המורים הגיעו עם מודעות למהלך של שינוי ועם מוכנות לחשיפה לרעיונות חדשים. העמדה החיובית הזו סייעה מאד גם בהתמודדות עם חבלי הלידה של החטיבות החדשות והאתגרים שהיה צורך להתמודד איתם בתקופה הראשונה. קיימים מרכזים להכשרת מורים שהוקמו על ידי המדינה במטרה לתת תמיכה למורים בהתייחס לתוכנית הלימודים ויעדיה. מרבית המורים מכינים את עצמם ללמד בהתאם לדרישות התוכנית ולמיומנויות הנדרשות במבחנים החדשים (למשל, הצורך להתמודד עם שאלות לא מוכרות באמצעות הבנה מעמיקה).

המורים למתמטיקה בחטיבת הביניים מחויבים בתואר שני המלווה בתעודת הוראה, ולרוב לומדים אותו ברצף עם התואר הראשון. כתוצאה מכך, רמת הידע המתמטי של המורים גבוהה. התלמידים נחשפים להוראת מתמטיקה על ידי מורה מקצועי כבר מכיתה ד.

עם פרסום תוכנית הלימודים החדשה, במקביל לספרי הלימוד פורסמו גם מדריכים למורים ונוצרו מסגרות להתפתחות מקצועית והשתלמויות, חלקן במימון ממשלתי או במימון של האיחוד האירופי. בנוסף לכך, מרכז הבחינות הארצי שעמל על פיתוח המבחנים החדשים מפרסם שאלות לדוגמה ומדריכים למורים מבעוד מועד כדי לאפשר למורים להתאים את הוראתם לדרישות במבחנים.

הרפורמה בהוראת המתמטיקה, אשר הביאה לשיפור משמעותי של ההישגים במתמטיקה של תלמידי פולין, החלה בבדיקה יסודית מהן נקודות החולשה של התלמידים ובהגדרת מטרות. נמצא שהקושי העיקרי של

¹¹ חלקים מהסעיף הזה לקוחים מתוך הדו"ח על הסיור לימודי בפולין, מטעם קרן טראמפ

התלמידים היה הקושי להתמודד עם בעיות לא מוכרות, שהיה מלווה בחוסר אמון של התלמידים ביכולת שלהם להתמודד עם בעיות כאלה, ובויתור מראש על ניסיון להתמודד. במגמה להכשיר את המורים לסייע לתלמידים להתמודד עם הקשיים הללו, נבנה מאגר גדול של דוגמאות לשאלות לא שגרתיות שדורשות ידע מתמטי בסיסי בלבד, אבל מחייבות חשיבה, בהיותן שאלות שהתלמידים לא ראו בעבר. זאת כדי להביא את התלמידים להאמין ביכולת שלהם לפתור בעיות לא מוכרות ואת המורים להאמין שבתלמידים יש את היכולת הזאת. התלמידים התלהבו מכך שהם יכולים להסתמך על השכל הישר כדי להצליח, דבר שהביא את המורים להתגבר על רתיעה שהייתה להם בהתחלה ובהתאם לשנות גישה.

הכשרת המורים התמקדה בשני עקרונות מרכזיים:

- להתחיל עם בעיות פשוטות ולהתקדם בהדרגה כדי לטפח ביטחון וגישה חיובית.
- לתת לתלמידים מספיק זמן כדי להגיע לפתרון בעצמם, ולא לעזור מהר מידי.

5.4 סיכום

כצפוי, בכל אחת משלוש המדינות, הכשרת המורים מתחילה במוסדות להשכלה גבוהה, טרם הכניסה להוראה, וממשיכה בהתפתחות מקצועית מגוונת במהלך החיים המקצועיים. חלק גדול מהמאפיינים של הכשרת המורים דומים לאלה הנהוגים אצלנו. נדגיש ארבע נקודות בולטות שנראות לנו חשובות במיוחד:

- כמו תוכניות ההוראה, גם התוכניות להכשרת מורים בסינגפור מבוססות על ניתוח מפורט של דרכי הוראה וכלים שצריכים להיות באמתחתו של כל מורה. התוכנית להכשרת המורים מדגישה 6 מרכיבים עיקריים: תוכן, קוגניציה, פתרון בעיות, חישוב, תקשורת ועמדות. לימודי ההוראה מתוכננים, באופן מערכתי, תוך הקפדה על כך שכל קורס יכלול, לצד נושאי התוכן הייחודיים לקורס, לפחות שניים מהמרכיבים הנוספים.
- במדינות השונות ההטמעה של חידושים בהוראה מלווה בהכשרת מורים, שחושפת את המורים, לצד התכנים או הכלים החדשים, גם לדרכים להשתמש בהם באופן שיקדם את מטרות ההוראה. לדוגמה, ראינו שהכשרת המורים בפולין לקראת שילוב משימות לא מוכרות לתלמידים כללה, לצד ההיכרות עם המשימות עצמן, גם פעולות שחזקו את האמונה של המורים ביכולת של התלמידים, גם החלשים, להצליח, ואת ההכרה של המורים בחשיבות של השהיית המענה שהם נותנים לתלמידים, על מנת לחזק את יכולתם (של התלמידים) להתמודד עם המשימות בכוחות עצמם.
- חלק מתוכניות ההתפתחות המקצועית, בעיקר בסינגפור, נעשות בתוך קהילות מורים, שחלקן נוצרות מתוך יוזמות מקומיות של מורים. יוזמות אלה נובעות מתוך צורך שהם מאתרים בעבודתם.
- חלק מההתפתחות המקצועית של המורים מבוססת על בנייה משותפת של פעילויות, על משוב הדדי ועל למידה מעמיתים.

6. בחינות ודרכי הערכה

6.1 סינגפור

סינגפור הושפעה בתחומים רבים מהעולם כולל בתחום ההערכה. במשך שנים רבות נסמכה אך ורק על מבחנים. למרות טענות שנשמעו על "המחלות" סביב הערכה באמצעות מבחנים, האמונה בתרומת המבחנים ללמידה גברה עליהן. בשנות השמונים קמה תנועה להערכה אחרת, מתוך רצון להשיג את מטרות הוראת המתמטיקה וערכיה טוב יותר מאשר באמצעות מבחנים. גלי הרפורמה בעולם ובפרט בארצות הברית, השפיעו גם על סינגפור. התפיסה היא כי תפקיד הערכה לא צריך להסתכם בדו"ג הישגי התלמידים. באמצעות כלי הערכה אפשר וצריך לבחון את מידת הבטחון, הסקרנות, ההתמדה, הגמישות, חדשנות ורפלקציה על העשייה המתמטית. יש הבחנה מוסכמת בין הערכה מסורתית (דף נייר ועפרון) להערכה חלופית בה הסטודנט נדרש ליותר מאשר לענות על שאלה מתוך הזיכרון או שאלות רב-ברירה (multiple choice). הערכה חלופית דורשת יותר וחייבת להיות בהלימה עם מטרות תוכנית הלימודים. השאלות בהערכה חלופית צריכות להיות מהעולם האמיתי (ר' איור 4.3).

בטבלה 6.1 שלהלן אפשר לראות את תוכנית ההבחנות במסגרת מסלולי הלימוד ואפשרויות המעבר ביניהם.

קיצור	שם מלא	הסבר
CA	Continuous Assessment	הערכה רציפה
SA	Semestral Assessment	הערכה סמסטריאלית
PSLE	Primary School Leaving Examination	מבחן סיום בית ספר יסודי
GCE (Ordinary Level)	Singapore-Cambridge General Certificate of Education for Special and Express Courses	מבחן סיום לבית ספר על-יסודי – מסלול ייחודי ומואץ
GCE (Normal Level)	Singapore-Cambridge General Certificate of Education for Normal Courses	מבחן סיום לבית ספר על-יסודי – מסלול רגיל
CA ו-SA		גם בבית הספר התיכון נערכים מבחני CA ו-SA
GCE (Advanced Level)	Examination at the end of pre-university education	בסיום הלימודים הקדם-אקדמיים.
Mock Examinations		
The Prelims (Preliminary Examinations)	For students in the national examination years	

טבלה 6.1 : מערך ההבחנות וההערכה המעצבת בסינגפור

כפי שעולה מהטבלה, מערך המבחנים במתמטיקה כולל בעיקר מבחנים בכתב, שהינם מוגבלים מבחינת הכלים (נייר, עפרון ועט), הזמן (זמן מוגדר), והמקום (בכיתה או בחלל בחינה). חשוב מכך, תפקידם בעיקר מתן ציונים ודירוג התלמידים (Fan, 2005). בעבר, הערכה ומבחנים נחשבו למונחים זהים, ללא קשר למקור של המבחן –

המורה או גוף ארצי. המורים נהגו ללמד אך ורק למבחנים, והתלמידים היו מכוונים בעיקר להראות ביצועים גבוהים במבחנים. כך נוצר שפע של ספרי תרגול בסינגפור שנקראו Assessment Books.

תלמידים במסלול הלימוד המהיר יכולים לגשת לבחינה של תעודה כללית לחינוך (רמה רגילה) (רמת GCE-O), לאחר ארבע שנות לימוד בביה"ס התיכון. עם זאת, תלמידים שנמצאים במסלול ה-IP, ומקבלים השכלה משולבת של שש שנות לימוד בבית הספר העל יסודי, לא נגישים לבחינה ברמת GCE-O. שש שנות הלימוד שלהם מסתיימות בתעודת השכלה כללית (רמה מתקדמת) ובגרויות בינלאומיות או כישורי תעודה אחרים. בתי ספר המציעים את מסלול ה-IP מקבלים תלמידים בתיכון 1. תלמידים במסלול לימודים N(A) לומדים את התעודה הכללית לחינוך ברמה [אקדמית] רגילה (רמת GCE-N(A)) לאחר ארבע שנים של תיכון בהתבסס על תוצאותיהם בבחינות רמת GCE-N(A), הם יכולים להמשיך שנה נוספת של בית ספר תיכון ולקחת את רמת GCE-O בחינה בסוף השנה החמישית בבית ספר תיכון או להמשיך עם השכלתם העל-תיכונית בפוליטכני או במכון לחינוך טכני (ITE). סטודנטים במסלול לימודים N(T) לומדים את התעודה הכללית לחינוך בחינה ברמה רגילה [טכנית] (רמת GCE-N(T)) לאחר ארבע שנים של תיכון. בהתבסס על תוצאותיהם בבחינות רמת GCE-N(T), הם יכולים להמשיך שנה נוספת של בית ספר תיכון ולקחת את רמת GCE-N(A). בחינה בסוף השנה החמישית בבית ספר תיכון או להמשיך בה השכלה על-תיכונית ב-ITE.

בעקבות הדאגה היתרה של המורים להצלחה במבחנים, בסוף שנות התשעים הוחלט להוסיף למבחנים הקיימים גם מבחן עם ספרים פתוחים ועבודה סביב פרויקטים. כעבור שלוש שנים התקבלה ההצעה שחלק מהציון על הפרויקט ייחשב בקבלה לאוניברסיטה. פרויקט הוגדר כמשימה או אוסף משימות שהתלמיד מבצע וכוללות: עיבוד נתונים, צפייה, חיפוש מקורות, זיהוי, מדידה, ניתוח, זיהוי דפוסים או קשרים/יחסים, גרפים, תקשורת בעל פה ובכתב. הטענה הייתה שפרויקט מאפשר להעריך את הרמה הקוגניטיבית ובפרט את היכולת לפתור בעיות וחשיבה יצירתית.

מטרת הפרויקטים הייתה:

“Inculcate and measure qualities including curiosity, creativity, and enterprise. Projects also nurture critical skills for the information age and cultivate habits of self-directed inquiry” (MOE, 1999b).

בשנת 2002 יצא מתווה בו נאמר כי הערכה חייבת להיות חלק מתהליכי ההוראה והלמידה. יחד עם זה התפרסמה רשימה עשירה של כלי הערכה אלטרנטיביים: יומן, תצפיות מורה בכיתה, פורטפוליו, הערכה עצמית והצעות כיצד להשתמש בכלים אלו. הריכוזיות של סינגפור סייעה בהטמעה. נעשתה הסבה לבעלי התפקידים להטמיע את כלי הערכה החדשים.

ההערכה המסורתית לרוב בדקה את התפיסות והמיומנויות. בהערכה חלופית מעריכים גם את התהליכים, הגישה והחשיבה ברמות הגבוהות (מטה-קוגניטיבית). כדי להטמיע את ההערכה החלופית, ניתנה למורים השתלמות של 30 שעות. היא אורגנה בעשרה מפגשים של אחת לשבוע. שמונה מפגשים נערכו בקמפוס ועוד שני מפגשים יועדו ליישום ההערכה בכיתתם. למורים ניתנה גם תמיכה לאורך היישום על ידי מנחי ההשתלמות באמצעות דוא"ל. בהשתלמות הוצגו שיטות שונות כגון: הערכה מבוססת על משימה אותנטית, PBL, הערכה מבוססת על יומן, פורטפוליו, מצגת של הלומדים, תצפיות וראיונות. עבור כל שיטה כזו, נלמדו היתרונות והחסרונות והודגמו דרכים ליישומה בכיתה.

הערכה אותנטית נלמדה לא רק ככלי להערכה בבית הספר אלא גם כהערכה של ההשתלמות. בעבודה הסופית המורים היו צריכים להצהיר איזו שיטת ההערכה הם החליטו ליישם בכיתתם ולמה. בנוסף הם היו צריכים לתאר את השיטה ומה על התלמידים לבצע במסגרתה, להסביר מה המידע שילמדו מהערכה זו ולדווח על תוצאות היישום ומסקנותיהם. נבחרו 4 שיטות: הערכת פרויקט, הערכת תקשורת, הערכת ביצוע, הערכה עצמית של הלומד. הבחירה בארבעת השיטות הללו נבעה משני טעמים: שיטות אלו מוגדרות היטב בקהילת החוקרים, והן רלוונטיות יותר לתוכנית הלימודים של סינגפור.

לסיכום, הדעה הרווחת בסינגפור היא שהערכה המסורתית יש יתרונות וערכים מוספים למתמטיקה בבית הספר. עם זאת, הערכה חלופית מאפשרת להעריך באופן שהוא הולם יותר את מטרות תוכניות הלימודים ויותר

קונסטרוקטיבי ומאפשרת שיפור והתקדמות של התלמידים, כשההערכה מהווה חלק אינטגרלי מההוראה והלמידה. עד כמה הערכה זו אכן תתרום, תלוי באופן היישום של המורים.

6.2 הולנד¹²

במהלך הלימודים בבית הספר, התלמידים נבחנים בשני מבחנים ארציים מרכזיים: הראשון ניתן לקראת סיום הלימודים בבית הספר היסודי (פברואר, כיתה ו', גיל 12). המבחן מהווה רכיב מרכזי בקביעת המסלול בו ילמדו התלמידים בבית הספר העל-יסודי – האם ילמדו במסלול מקצועי, כללי או אקדמי. בנוסף, עם סיומו של בית הספר התיכון התלמידים נבחנים ברוב המקצועות שלמדו. בכל מקצוע מתקיימים מבחנים בית-ספריים ומבחן ארצי. את המבחנים הבית-ספריים כותבים המורים. בנוסף, מעודדים את המורים להעריך את התלמידים בדרכים נוספות, למשל באמצעות תחרויות ואולימפיאדות.

הציון הסופי שמקבל התלמיד מורכב מ-50% הציון הבית ספרי ו-50% הציון במבחן הארצי.

המבחנים במתמטיקה הנכתבים למסלולים השונים נבדלים זה מזה בתכנים, ובמינון של השאלות שניתנות בהקשר חוץ-מתמטי. יחד עם זאת, בכל המבחנים יש גם שאלות אוריינות.

המבחנים הארציים כוללים שאלות שהתלמידים לא מכירים ואשר דורשות מהתלמידים להתמודד עם בעיות שעבורם אין להם דרך פתרון מוכרת מראש. הידיעה שבעיות מסוג זה נכללות על דרך קבע במבחנים משליכה על דרך ההוראה.

קיימים סטנדרטים מפורטים וברורים שעל פיהם המורים נדרשים ללמד ולבחון.

6.3 פולין¹³

כפי שצוין בסעיף 4.4, במסגרת תוכנית הלימודים החדשה הוגדרו בפולין תוצאות לימודיות מצופות (expected learning outcomes), והמבחנים האחדים מטעם מערכת החינוך בודקים את השגת התוצאות הללו. המבחנים נועדו גם לדרבן את המורים להטמיע את הרפורמה.

מערכת החינוך הפולנית, כולל ההשכלה הגבוהה, מבוססת על השוואה בין התוצאות הלימודיות הרצויות לבין אלה שהושגו בפועל. הרעיון של תוצאות לימודיות מצופות הוכח כיעיל. מעבר לכך שהוא מגדיר את הדרישות מהמורים ומהתלמידים, הוא גם מבטיח עקביות בין תהליך ההערכה לבין תהליכי ההוראה והלמידה.

בפולין נערכים כיום שני מבחנים אחידים במתמטיקה מטעם מערכת החינוך:

1. בסוף בית הספר היסודי – מבחן חובה בכתב שמהווה חלק מהדרישה לקבלת תעודת סיום של בית הספר היסודי. לא מוגדר ציון מינימלי במבחן ולכן אי אפשר להיכשל בו. המבחן נערך בדרך כלל באפריל, ולתלמידים שלא יכלו להיבחן באפריל יש מועד נוסף שבו הם יכולים להיבחן, ביוני. כשני שליש מהמבחן בנוי משאלות סגורות, שבהן התלמידים צריכים לבחור תשובה אחת מתוך רשימת אפשרויות (ר' תרשימים 4.5 ו-4.6). יתר הפריטים הם במתכונת של שאלות פתוחות. מבחנים לדוגמה מפורסמים באתר של משרד החינוך, כולל פריטי מבחן והתשובות הנכונות. למבחן יש גרסאות שמותאמות לתלמידים עם צרכים מיוחדים. תלמידים שהשתתפו בתחרות מחוזית במתמטיקה (שנכללת במערך התחרויות של המדינה) וזכו לניצחון או הגיעו לשלב הגמר פטורים מהמבחן וזוכים באופן אוטומטי לציון המקסימלי במקצוע זה.

2. בסוף בית הספר התיכון (Matura) – מבחן בכתב שמטרתו לבדוק את המידה שבה הנבחנים שולטים בדרישות של תוכנית הלימודים. מאז הרפורמה, תוצאות המבחן הזה משמשים כקריטריון בקבלה למוסדות

¹² חלק זה מתבסס בעיקר על: Scheltens et al., 2020

¹³ מבוסס על [האתר של משרד החינוך הפולני](#) והדו"ח על הסיוור הלימודי בפולין, מטעם קרן טראמפ

זסלבסקי, רון, זודיק: ניתוח השוואתי של מערך לימוד המתמטיקה במדינות בעלות הישגים גבוהים במבחני פיזה, נובמבר 2022

ההשכלה הגבוהה, במקום מבחני הכניסה השונים שהיו נהוגים עד אז בכל האוניברסיטאות. הבחינה במתמטיקה הפכה לחובה על מנת לסיים את התיכון. על מנת להיות זכאים לקבל תעודת סיום של בית ספר תיכון (מקביל לתעודת בגרות אצלנו), על התלמידים לקבל ציון של לפחות 30% במבחן.

למרכז הבחינות הארצי המחבר את המבחנים החיצוניים יש השפעה רבה על הנעשה בבתי הספר ועל הצלחת הרפורמה. המרכז עובד בשקיפות מלאה ומציג באתרו את הבחינות, את המחווה להערכתן, ודוגמאות של שאלות שעליהן המורים יכולים להתבסס בזמן ההוראה שלהם. כחלק בלתי נפרד ממערך המבחנים, משולבות בעיות לא שגרתיות (non-routine) מהחיים, שאינן מוכרות לתלמידים ודורשות חשיבה אסטרטגית מעבר לידע פרוצדורלי.

כל המבחנים החיצוניים מפותחים באופן דומה: צוותים אזוריים הכוללים עד 7 מומחים בכל צוות מחברים שאלות. השאלות נבדקות על ידי וועדה בה חברים חוקרים ומורים הבוחרים מתוכן את השאלות למבחן. בשלב הבא, שאלות המבחן עוברות בדיקה בשטח עם תלמידים לאורך מספר שנים, על מנת להגיע למועד המבחן עם בטחון בתוקף ובמהימנות של השאלות ולאפשר בסיס להשוואה בין הישגי התלמידים בשנים שונות.

6.4 סיכום

- בכל שלוש המדינות רואים במערך ההיבחנות אמצעי לדרבן מורים להטמיע חידושים בגישות הוראה ולא רק כלי לדירוג הישגי התלמידים.
- בכל שלוש המדינות יש מערך היבחנות מסודר. בהולנד ובפולין נערכים שני מבחנים אחידים במתמטיקה מטעם מערכת החינוך, האחד לקראת סיום בית הספר היסודי והשני בסיום התיכון. בהולנד מבחן סיום בית הספר היסודי מסייע בקביעת המסלול שבו ילמדו התלמידים.
- בסינגפור לא נטשו את המבחנים המסורתיים, והערכה חלופית היא רק תוספת. המסר הוא שקודם כל חשוב לשלוט במיומנויות.
- בהולנד ובפולין משלבים משימות שאינן מוכרות לתלמידים באורח קבע בתהליך ההערכה, לתלמידים מכל הרמות כולל תלמידים חלשים. משימות כאלה יכולות לחזק את תחושת המסוגלות של כל אחד, ולפתח חשיבה ברמות גבוהות. באמצעות הידיעה המוקדמת שבכל מבחן צריך לצפות שיופיעו משימות כאלה, המורים והתלמידים מתרגלים לצורך להיות מוכנים לבלתי צפוי.

7. סיכום – ממצאים, מסקנות והמלצות

7.1 מאפיינים משמעותיים במדינות השונות

שלוש המדינות שסקרנו הן מאוד שונות זו מזו, וכנראה שלכל אחת מהן יש סוד הצלחה אחר מעורר השראה (שכנראה לא נעוץ בתוכנית הלימודים עצמה כי ההבדלים בין התוכניות לא גדולים): סינגפור והמעקב ההדוק אחרי התלמידים שמאפשר השלמת פערים, הולנד והחיבור לפתרון בעיות הקשורות לעולם האמיתי ופולין והשילוב של בעיות לא מוכרות לתלמידים. ברור שסוד ההצלחה לא נעוץ במאפיין בודד, אלא באיזשהו תמהיל שקשה לאפיין. כך, למשל, בדוח מקינזי (2007) נאמר: "הולנד מייחסת חלק גדול מהצלחתם של תלמידיה למערכת פיקוח מבוזרת ביותר; סינגפור טוענת שהצלחה בזכות פיקוח מרכזי הדוק" (שם, עמ' 8).

בטבלה 7.1 מובאים מאפיינים בולטים שמצאנו לגבי שלוש המדינות הנחקרות. מדובר במאפיינים שהופיעו במפורש ובמודגש במסמכים שסקרנו. במקומות בטבלה שלא סימנו "✓", זה משום שלא מצאנו מידע מפורש על אותו המאפיין במדינה התואמת. זה לא אומר שהמאפיין הזה לא קיים באותה המדינה, אך סביר להניח שגם אם הוא קיים, הוא לא זוכה לחשיבות מרובה, אחרת כנראה היו מצהירים על כך בְּרִישׁ גָּלִי.

מאפיינים בולטים שמדווחים	המדינה	סינגפור	הולנד	פולין
1. מטרות ומדיניות חינוכית				
הכנת התלמידים להתמודד עם אתגרי העולם המשתנה	✓	✓	✓	✓
ליווי הלמידה במחקר ברמה ארצית ויישום של הממצאים	✓	✓	✓	✓
דגש על שוויון הזדמנויות ואפשרויות בחירה מותאמות לפרט	✓	✓	✓	✓
2. מבנה מערכת החינוך				
מסלולי לימוד שונים בכיתות של חטיבת הביניים	✓	✓	✓	✓
אפשרויות מעבר בין המסלולים	✓	✓	✓	✓
תוכנית לימודים במתמטיקה מובחנת ומותאמת לכל מסלול	✓	✓	✓	
חינוך חובה מגיל :	3	4	5	
3. מערך ההיבחנות במתמטיקה ומעקב אחרי התלמידים				
אבחון ותמיכה מגיל צעיר, כבר מקדם בית-הספר היסודי	✓	✓		
מעקב מוקפד אחר התקדמות התלמידים ברמת הפרט	✓	✓		
הערכה מסורתית באמצעות מבחנים בכתב	✓	✓	✓	✓
הערכה אלטרנטיבית (באמצעות משימות-ביצוע, פרויקטים, תחרויות)	✓	✓	✓	✓

מאפיינים בולטים שמדווחים	המדינה	סינגפור	הולנד	פולין
4. דגשים בתוכנית הלימודים במתמטיקה וגישות פדגוגיות				
דגש על פיתוח חשיבה והנמקה		✓	✓	✓
קישורים לחיי היומיום (בעיקר יישום)		✓	✓	✓
דגש על בנייה של כלים מתמטיים מתוך סיטואציות מציאותיות			✓	
שילוב בעיות לא מוכרות לתלמידים כאורח חיים בהוראה ובהערכה (גם לתלמידים חלשים)			✓	✓
פעולות יזומות שמכוונות לגרום לתלמידים לאהוב מתמטיקה		✓		✓
פעולות יזומות שמכוונות לגרום לתלמידים להעריך את חשיבות המתמטיקה			✓	
רצף מובנה של הלמידה : קונקרטי, ציורי, מופשט (CPA)		✓		
זריעת זרעים מובנית לקראת נושאים מופשטים (שיטת המודל)		✓		
ניתוח שיטתי של מרכיבי הידע הדרושים להמשך הלמידה והבטחתם כבסיס ללמידה של נושא חדש		✓		
6. התפתחות מקצועית של המורים למתמטיקה				
ההשכלה וההכשרה הדרושים כדי ללמד מתמטיקה בחטיבת הביניים הן :	המועמדים להוראה עוברים תהליך סינון לפני שמתחילים את ההכשרה, ובסיומה נדרשים לעבור בחינות בבתי הספר שאליהם הם פונים.	יש שני סוגים של רישיון הוראה ללמד מתמטיקה. לנמוך מספיק תואר ראשון ולגבוה צריך גם תואר שני.	דרישה לתואר שני במתמטיקה המלווה בתעודת הוראה	
חובה של מורים למכסת שעות שנתית של השתלמות מקצועית	דרישה ל-100 שעות במתמטיקה ו/או הוראתה	דרישה ל-40 שעות, מתוכן 10 שעות בלבד במתמטיקה ו/או הוראתה		
ליווי רפורמות ושינויים בתוכנית הלימודים בהכשרה מותאמת של המורים		✓		✓

טבלה 7.1 : מאפיינים בולטים במדינות השונות

7.2 המלצות

מעניין לציין ששתיים מהמדינות בהן עסקנו נתקלות בבעיות דומות לאלה שבישראל. מדיווחים של חוקרים סינגפוריים, מצטייר שהמורים בסינגפור הם בעלי כישורים גבוהים, גם בהיבט של ידע מתמטי ושל ידע דידיקטי וגם במסירות לעבודה ובנחישות להביא את תלמידיהם להצלחה. הולנד ופולין מתארות קשיים שחלקם דומים לקשיים המוכרים לנו בישראל: מחסור במורים עם השכלה מתמטית מספקת וכתוצאה מכך העסקה של מורים עם כישורים פחות מתאימים, נשירה של מורים מהמערכת לאחר תקופה קצרה במקצוע. מבין ספרי הלימוד המאושרים לשימוש, מורים רבים בוחרים את הספרים היותר "קלים" אך פחות מטפחים חשיבה ברמה גבוהה והבנה מושגית. בחרנו לציין את הנקודות האלה כדי להדוף מראש דחייה של אימוץ דרכי ההתמודדות שלמדנו מהמדינות האחרות "עד שיבשילו תנאים שיאפשרו זאת".

מתוך התבוננות במה שמצטייר אודות מערך החינוך המתמטי בשלושת המדינות – סינגפור, הולנד ופולין, גיבשנו חמש תובנות עיקריות, שתרגמנו לשפה של המלצות. אין הכוונה להציע מרשמים מה צריך לעשות בישראל, אלא בעיקר לעורר חשיבה מחודשת על סוגיות מרכזיות שיכולות לתת מענה לצרכים של מערכת החינוך המתמטי בארץ.

7.2.1 ראייה מערכתית וליווי תהליכי הלמידה במחקר ברמה הארצית

במערכת החינוך בישראל יש תפיסת חינוך מתחדשת שעולה בקנה אחד עם אותה המטרה ([תפיסה](#) מתחדשת). לפי התפיסה המתחדשת בארץ, מערכת החינוך צריכה לחתור להגשמתן של ארבע מטרות-על: יצירת בסיס ערכי והשכלתי משותף בקרב הלומדים; קידום שוויון הזדמנויות באמצעות צמצום הקשר בין תנאי החיים שהילד נולד אליהם לבין אופק אפשרויותיו; הכנת הלומדים לחייהם הבוגרים באופן שיאפשר להם לשגשג כפרטים; סיוע ללומדים לממש את הפוטנציאל שלהם ולעצב את חייהם באופן שיקדם את השלומות (well being) שלהם בהווה ובעתיד. יש דמיון רב בין הגישה הפדגוגית המתחדשת המוצהרת במערכת החינוך בישראל לבין הגישות בשלושת המדינות, אולם תוכנית הלימודים במתמטיקה בחטיבת הביניים, שקדמה בכמה שנים למסמך הרשמי של משרד החינוך, עדין לא מייצגת די הצורך את התפיסה הכללית. עם זאת, במסמכים רשמיים שנלווים לתוכנית הלימודים לחטה"ב יש ניצנים לכך ובתוכנית הלימודים במתמטיקה לחטיבה העליונה, שפותחה אחריה, עקרונות אלה נלקחים בחשבון בצורה מפורשת.

בשלוש המדינות שסקרנו, לציבור המורים ידוע היטב איך מתקבלות החלטות מערכתיות, ואילו עדויות קיימות לגבי נחיצות ההחלטות, ולגבי מידת ההצלחה של ביצוען. בסינגפור בולט מאד האמון שיש למורים בהנהגה ובמדיניות החינוכית, ובכל זאת הם מלווים במחקר את הגישות המיושמות במערכת ובודקים את עצמם כל שש שנים. הבדיקה מאפשרת תיקונים והתאמות כדרך חיים. כל שינוי מלווה בהערכה מעצבת. יש מקום לשקול לאמץ את העיקרון של ליווי מה שנעשה במערכת החינוך המתמטי במחקר, ברמה הארצית, כדי לקבל החלטות מושכלות. כך, למשל, חשוב ללמוד על טבען ויעילותן של דרכי ההטמעה של חידושים בהוראה, כדי לזהות נקודות חוזק ונקודות שדורשות עדכון ושינוי או העמקה והרחבה.

7.2.2 הרחבת סוגי המשימות בהוראה ובמבחנים לכל הרמות

יש שני מאפיינים של משימות שחשוב לכלול בצורה קבועה ומתמשכת בהוראה ובמערך המבחנים: האחד קשור לשימוש בסיטואציות מציאותיות בפתרון בעיות, והשני קשור להתמודדות תלמידים עם בעיות שאינן מוכרות להם. חשוב לקחת בחשבון שעל מנת שמשמיות מסוג מסוים יחלחלו לתוכנית הלימודים חייבת להיות מסה קריטית שלהם.

מעדויות מהמדינות שסקרנו, ולא רק מהן, לעיגון של לימוד המתמטיקה בסיטואציות מציאותיות יש יתרונות רבים, במיוחד אם הן אותנטיות. בסינגפור ובפולין מדגישים את הפוטנציאל של העיסוק במשימות כאלה להעלאת העניין והמוטיבציה של התלמידים ללמוד מתמטיקה. בהולנד רואים בגישתם פוטנציאל לפיתוח ההכרה של התלמידים במתמטיקה כמקצוע רלבנטי ושימושי, לפיתוח חשיבה ברמות גבוהות ועוד. ערך מיוחד שיש למשימות כאלה הוא יצירת מצב שבו התלמידים מרגישים שהם עוסקים במשהו שהוא חשוב ומעניין,

שמאפשר להם חיפוש פתוח תוך שיתוף טבעי עם עמיתיהם. מטבע הדברים, במשימות כאלה יכולים להיות נתונים עודפים, שצריך לברור מהם את אלה שרלבנטיים לבעיה, דבר המוסיף אתגר לתהליך הפתרון.

המאפיין השני, הוא שילוב משימות שאינן מוכרות לתלמידים באורח קבע בתהליך הלימוד וההערכה, לתלמידים מכל הרמות כולל תלמידים חלשים. משימות כאלה יכולות לחזק את תחושת המסוגלות של כל אחד, ולפתח רמות חשיבה ברמות גבוהות. באמצעות הידיעה המוקדמת שבכל מבחן צריך לצפות שיופיעו משימות כאלה, המורים והתלמידים מתרגלים לצורך להיות מוכנים לבלתי צפוי.

בשלושת המדינות ראינו שפריטי מבחן יכולים לשרת ולכוון הטמעה של הגישה הפדגוגית המומלצת. Vos (2020) מחזקת את הטענה הזאת, ומצאה שלשאלות הבחינה, שעשירות במשימות אותנטיות, יש השפעה על הדגשים בהוראה בפועל. מכאן מומלץ שבד בבד עם **פיתוח והרחבה של מאגרי משימות משני הסוגים** המתוארים בסעיף זה, **שילובם במבחנים מערכתיים** חיוני לצורך השילוב שלהם בהוראה.

7.2.3 השקעה במורים

רבים מהמקורות חוזרים ומדגישים כי ההצלחה של כל שינוי בתוכנית הלימודים ובגישות חדשות להוראה המתמטיקה מחייב השקעה בראש וראשונה במורים ובהכשרה וליווי מקצועי שלהם, כדי שיהיו להם הכלים ליישם גישות חדשות, ושהיו חדורי אמונה שהשינוי מבורך וראוי להשקיע בו. פיתוח חומרי לימוד ואפילו מדריכים למורים אינו מספיק. חיזוק לדעה הזאת אפשר למצוא בדוח מקינזי, שעל בסיס נתונים ממדינות שונות מצאו כי הדרך היעילה ביותר להגיע לשיפור רציף ומשמעותי בהישגי התלמידים תלויה בשיפור רציף ומשמעותי בהוראה.

חשוב לפתח אצל המורים חיישנים, דרכי ראייה, שאלות ששואלים כל הזמן, כמו מה תפקיד ההקשר, האם אפשר בלעדיו, איך אפשר באמצעות שינויים קטנים למנף משימות קיימות, התנסות בפיתוח והתאמה של משימות לפי עקרונות מסוימים. מעניין לבדוק, מה קיים בארץ, עד כמה המשימות מפתחות חשיבה עצמאית. אם לא נותנים לתלמידים מספיק זמן להתלבט, לחשוב, לתקשר עם עמיתים סביבה הבעיה, וממהרים לכוון את אותם לתשובה הסופית, הערך והרמה הקוגניטיבית של המשימה יורד.

קיימות בארץ תוכניות שונות שיש בהן ניצנים לשילוב משימות מהסוגים שצינו למעלה. השאלה – האם הן כבר ברמה מערכתית? איזו הדרכה ניתנת למורים ואיך נעשה מעקב אחרי היישום שלהן בכיתה. למשל, איך בודקים שמורים אכן נותנים זמן מספיק לחשיבה? מי התלמידים שנהנים מהתוכניות האלה?

7.2.4 השקעה בתלמידים החלשים ובסגירת פערים

בפולין ראו שהשקעה בתלמידים החלשים מקפיצה את ההישגים של המדינה במבחני פיזה בצורה משמעותית, בין היתר, כי לתלמידים החלשים יש יותר אפשרויות להתקדם. בכיוון זה גם בסינגפור רואים חשיבות להשקיע בהון האנושי ולתת הזדמנויות שוות לאוכלוסיות מוחלשות. הם משקיעים ותומכים בסגירת פערים וחיזוק התלמידים החלשים בכל שלב בלימודים, במגמה לאפשר להם לעבור ממסלול אחד למסלול גבוה יותר. יש מקום לבדוק מה מזה רצוי וניתן ליישם גם בישראל.

7.2.5 אין מקום לגישה של "הכל או לא כלום"

בהקשר של הטמעת חידושים במערכת החינוך, העיקרון של **לא "הכל או לא כלום"** מתייחס לשני היבטים מרכזיים: האחד קשור להדרגתיות שביישום (לא הכל בבת אחת) והשני קשור לכך שלא כל רפורמה ניתן ליישם במלואה, ושגם ליישום חלקי יכול להיות ערך רב.

מפולין אנו למדים על החשיבות להתקדם בהדרגה, להתחיל עם משימות פשוטות שאינן מוכרות ומעוררות מחשבה, כדי לאפשר למורים וגם לתלמידים **לחוות הצלחה** כדי לרצות להמשיך לעסוק במשימות כאלה. אין צורך במהפכה, ולא חייבים לעשות את השינוי בבת אחת. הכנסת שינויים צריכה להיעשות בהדרגה, החל

מהצלחות קטנות. רצוי לעשות אותו בהדרגה, כי הניסיון מראה שלעיתים קרובות שכשמונסים לעשות שינוי גדול בבת אחת, המורים חווים מפח נפש שמרפה את ידיהם.

בהקשר להיבט השני, אפשר ללמוד ממדינות ששמו להן למטרה לאמץ את גישת ה-RME (Webb et al. (2020). מתארים ניסיונות לאמץ את הגישה של הולנד לארה"ב. הגישה של RME אומנם חלחלה לבתי ספר שבחרו לאמץ אותה, אך רק באופן חלקי. המחברים טוענים שגם ליישום החלקי יש ערך רב. Dickinson et al. (2020). מדווחים על ניסיון דומה בבריטניה. בכל הניסיונות הללו למורים ולמורי מורים היה תפקיד קריטי בהצלחת היישום.

8. רשימת מקורות (References)

- ברפר, מ', ומורשד, מ' (2007). [דוח מקינזי](#) על הגורמים להצלחתן של מערכות החינוך הטובות בעולם (32 עמודים). הד החינוך, [תרגום פרקש, י'].
- Białecki, I., Jakubowski, M., & Wiśniewski, J. (2017). Education policy in Poland: The impact of PISA (and other international studies). *European Journal of Education*, 52(2), 167-174.
- Boon, P., Doorman, M. & Drijvers, P. (2013). Booklet for the RME/FIsme workshop at ICMI Study 22: Task Design (pp. 26).
http://www.fisme.science.uu.nl/~doorm101/ICMI22_RME_FI_booklet.pdf
- Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. MA: Harvard University Press.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. MA: Harvard University Press.
- Chow, W.K. (2013). *Discovering mathematics 1B* (2nd edition). Singapore: Star Publishing Pte Ltd.
- CCSSN — *Common Core State Standards for Mathematics* (2010). Washington, DC: National Governors Association.
- Daemen, J., Konings, T., & van den Bogaart, T. (2020). Secondary school mathematics teacher education in the Netherlands (Chapter 9). In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics* (pp. 147-175). ICME-13 Monographs. Cham, Switzerland: Springer.
https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-33824-4_9
- Dickinson, P., Eade, F., Gough, S., Hough, S., & Solomon, Y. (2020). Intervening with Realistic Mathematics Education in England and the Cayman Islands—The challenge of clashing educational ideologies (Chapter 19). In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics* (pp. 341-366). ICME-13 Monographs. Cham, Switzerland: Springer.
- Fan, L. (2005). Improving mathematics teaching and learning through effective classroom assessment: Experiences and perspectives from Singapore schools. In N. Y. Wong (Ed.), *Revisiting mathematics education in Hong Kong for the new millennium* (pp. 359-376). Hong Kong: Hong Kong Association for Mathematics Education.
- Kaur, B. (2019). Overview of Singapore's education system and milestones in the development of the system and school mathematics curriculum (Chapter 2). In T. L. Toh, B. Kaur, & E. G. Tay (Eds.), *Mathematics Education in Singapore*, Mathematics Education — An Asian Perspective (pp. 13-33). Singapore: Springer.
- Kaur, B., Cheng, L. P., Wong, L. F., & Seto, C. (2019). Models of teacher professional development (Chapter 18). In T. L. Toh, B. Kaur, & E. G. Tay (Eds.), *Mathematics Education in Singapore*, Mathematics Education — An Asian Perspective (pp. 429-449). Singapore: Springer.
- Kaur, B., Soh, C. K., Wong, K. Y., Tay, E. G., Toh, T. L., Lee, N. H., Ng, S. F., Dindyal, J., Yen, Y. P., Loh, M. Y., Tan, H. C. J., & Tan, L. C. (2015). Mathematics Education in Singapore (pp. 311-316). In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, DOI 10.1007/978-3-319-12688-3_21.

- Kaur, B., Wong, L. F., & Govindani, S. N. (2020). Graphing Linear Equations — A comparison of the opportunity-to-learn in textbooks using the Singapore and the Dutch approaches to teaching equations (Chapter 7). In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics* (pp. 97-111). ICME-13 Monographs, Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_7.
- Kaur, B., & Leong, Y. H. (Eds.) (2021). *Mathematics instructional practices in Singapore secondary schools*, Mathematics Education – An Asian Perspective. Springer Nature Singapore Pte Ltd. https://doi.org/10.1007/978-981-15-8956-0_9
- Kaur, B., & Leong, Y. H. (2021). Overview of the school system and school mathematics curriculum in Singapore (Chapter 1). In B. Kaur & Y. H. Leong (Eds.), *Mathematics instructional practices in Singapore secondary schools*, Mathematics Education – An Asian Perspective (pp. 1-13). Springer Nature Singapore Pte Ltd.
- Kaur, B., Tay, E. G., Tong, C. L., Toh, T. L., & Quek, K. S. (2021). The instructional core that drives the enactment of the school mathematics curriculum in Singapore secondary schools (Chapter 3). In B. Kaur & Y. H. Leong (Eds.), *Mathematics instructional practices in Singapore secondary schools*, Mathematics Education – An Asian Perspective (pp. 45-59). Springer Nature Singapore Pte Ltd.
- Kaur, B., Tay, E. G., Toh, T. L., Leong, Y. H., Lee, N. H. (2021). A Study of the Enacted School Mathematics Curriculum in Singapore Secondary Schools (Chapter 2), in: B. Kaur et al. (Eds.), *Mathematics Instructional Practices in Singapore Secondary Schools* (pp. 17-43). Singapore: Springer.
- Kindt, M., Wijers, M., Spence, M. S., Brinker, L. J., Pligge, M. A., Burrill, J., et al. (2010). Graphing equations. In Wisconsin Center for Education Research & Freudenthal Institute (Eds.), *Mathematics in context*. Chicago, IL: Encyclopaedia Britannica, Inc.
- Lee, N. H., Ng, W. L., & Lim, L. G. P. (2019). The intended school mathematics curriculum (Chapter 3). In T. L. Toh, B. Kaur, & E. G. Tay (Eds.), *Mathematics Education in Singapore*, Mathematics Education — An Asian Perspective (pp. 35-53). Singapore: Springer.
- Leong, Y. H., & Kaur, B. (2019). The enacted school mathematics curriculum (Chapter 4). In T. L. Toh, B. Kaur, & E. G. Tay (Eds.), *Mathematics Education in Singapore*, Mathematics Education — An Asian Perspective (pp. 55-65). Singapore: Springer.
- Ministry of Education [MOE] (2012a). *Primary mathematics teaching and learning syllabus*. Singapore: Author.
- Ministry of Education [MOE] (n.d.). *21st century competencies*. www.moe.gov.sg
- Ng, S. F., Lee, K. (2005). How Primary Five pupils use the Model Method to solve word problems. *The Mathematics Educator*, 9(1), 60-83.
- OECD (2016). *Equations and Inequalities: Making mathematics accessible to all* (224pp.). PISA, OECD Publishing, Paris. <http://dx.doi.org/10.1787/9789264258495-en>.
- Quek, K.S., & Fan, L. (2009). Rethinking and researching mathematics assessment in Singapore: The quest for a new paradigm (Chapter 18). In K. Y. Wong, P. Y. Lee, B. Kaur, P. Y.

- Foong, & S. F. Ng (Eds.), *Mathematics Education: The Singapore Journey* (pp. 413-436). World Scientific Publishing Company Pte. Ltd.
<http://ebookcentral.proquest.com/lib/nyulibrary-ebooks/detail.action?docID=477281>
- Scheltens, F., Hollenberg-Vos, J., Limpens, G., & Stolwijk, R. (2020). Testing in mathematics education in the Netherlands (Chapter 16). In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics* (pp. 303-330). ICME-13 Monographs. Cham, Switzerland: Springer.
- Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Tay, E. G., Ho, W. K., Cheng, L. P., & Shutler, P. M. E. (2019). The national institute of education and mathematics teacher education: Evolution of pre-service and graduate mathematics teacher education (Chapter 15). In T. L. Toh, B. Kaur, & E. G. Tay (Eds.), *Mathematics Education in Singapore*, Mathematics Education — An Asian Perspective (pp. 351-365). Singapore: Springer.
- Toh, T. L., Kaur, B., Tay, E. G. (2019). Reviewing the past, striving in the present and moving towards a future-ready mathematics education (Chapter 21). In T. L. Toh, B., Kaur, & E. G. Tay (Eds.) *Mathematics Education in Singapore*, Mathematics Education — An Asian Perspective (pp. 491-498). Singapore: Springer.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9*. Utrecht: Utrecht University.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 521–525). Dordrecht, the Netherlands: Springer.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.) (2020). *International reflections on the Netherlands didactics of mathematics*, ICME-13 Monographs. Cham, Switzerland: Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1>
- Vos, P. (2020). Task contexts in Dutch mathematics education. In M. Van den Heuvel-Panhuizen, (Ed.), *National reflections on the Netherlands didactics of mathematics*, ICME-13 Monographs (pp. 31-53). Cham, Switzerland: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-33824-4_3
- Webb, D. C., & Peck, F. A. (2020). From tinkering to practice – the role of teachers in the application of Realistic Mathematics Education principles in the United States (Chapter 2). In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics* (pp. 21-38). ICME-13 Monographs. Cham, Switzerland: Springer.
- Wijaya, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 89, 41–65.
- Wisconsin Center for Education Research & Freudenthal Institute (2010). *Mathematics in context*. Chicago, IL: Encyclopaedia Britannica Inc.
- Wong, K. Y., Lee, P. Y., Kaur, B., Foong, P. Y., & Ng, S. F. (Eds.) (2009), *Mathematics Education: The Singapore Journey*. World Scientific Publishing Company Pte. Ltd.

<http://ebookcentral.proquest.com/lib/nyulibrary-ebooks/detail.action?docID=477281>

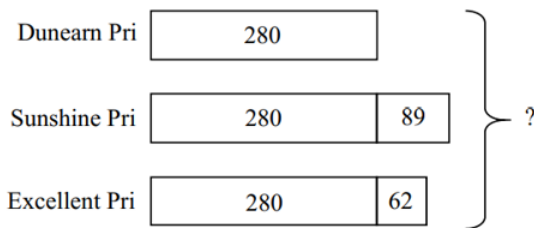
- Wong, K. Y. et al. (Editorial Board) (2009). Introducing the landscape of the Singapore mathematics education journey. In K. Y. Wong, P.Y. Lee, B. Kaur, P.Y. Foong, & S.F. Ng (Eds.), *Mathematics Education: The Singapore Journey* (pp. 1-10). World Scientific Publishing Company Pte. Ltd.
- Yeap, B. H., & Kaur, B. (2008). Elementary school students engaging in making generalization: A glimpse from a Singapore classroom. *ZDM Mathematics Education*, 40, 55-64.
- Yeo, J. B. W. (2021). Cultivating of positive attitudes by experienced and competent mathematics teachers in Singapore secondary schools (Chapter 7). In B. Kaur & Y. H. Leong (Eds.), *Mathematics instructional practices in Singapore secondary schools*, Mathematics Education – An Asian Perspective (pp. 123-139). Springer Nature Singapore Pte Ltd.
- Yeo, J. B. W., Choy, B. H., Lim, L. G. P., & Wong, L. F. (2019). Innovative pedagogical practices (Chapter 8). In T. L. Toh, B. Kaur, & E. G. Tay (Eds.), *Mathematics education in Singapore*, Mathematics Education — An Asian Perspective (pp. 165-193). Singapore: Springer.

9. נספחים

9.1 נספח א': שיטת המודל: זריעת זרעים בבית הספר היסודי לקראת האלגברה שיפגשו בחטה"ב כפי שמתואר בסעיף 4.1, בבית הספר היסודי בסינגפור פותרים בעיות מילוליות בדרך המכונה "שיטת המודל". בשיטה זו מייצגים כמויות שוות באמצעות מלבנים באורך שווה. להלן דוגמאות לשיטת המודל' כולן לקוחות מ- Yeo et al. (2019).

דוגמה 1 לשימוש בשיטת המודל

בבית הספר היסודי דנירן לומדים 280 תלמידים. בביה"ס היסודי סנשיין יש 89 תלמידים יותר מאשר בדנירן. בבית הספר סנשיין למצטיינים יש 62 תלמידים יותר מאשר בדנירן. כמה תלמידים לומדים בשלושת בתי הספר ביחד?

פתרון בשיטת המודל:

מרכזים את הנתונים באיור המשמש כמודל (ראו משמאל).

מהמודל אפשר לראות שמספר התלמידים בשלושת בתי הספר הוא 991:

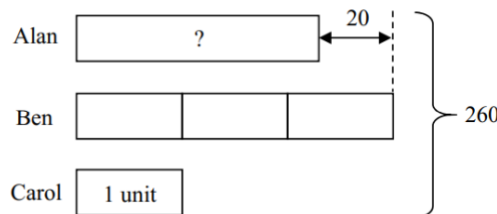
$$280 \times 3 + 89 + 62 = 991$$

מה דוגמה 1 מדגימה?

דוגמה זו מדגימה את הנחת היסודות לשיטת המודל.

דוגמה 2 לשימוש בשיטת המודל

\$260 חולקו בין אלן, בן וקרול. אלן קיבל \$20 פחות מבן ובן קיבל פי 3 מקרול. כמה קיבלה קרול?

פתרון בשיטת המודל:

- מציירים את הנתונים.
- מהאיור רואים שנוח להתייחס לסכום הכסף של קרול כיחידה.
- מהאיור רואים ש-7 יחידות הן ביחד \$20 יותר ממה שיש לשלושתם ביחד.
- מכאן מחשבים את סכום הכסף שקרול קיבלה:

7 יחידות הן \$280. (בהנחה שלאן היו \$20 נוספים). לכן, יחידה אחת היא: $280:7 = \$40$

מכאן שקרן קיבלה \$40.

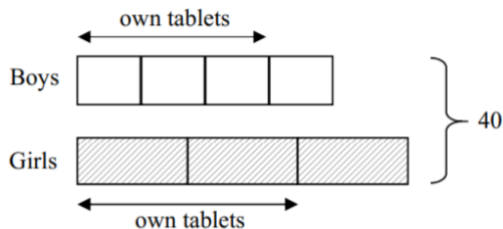
מה דוגמה 2 מדגימה?

גם בדוגמה זו מייצגים כמויות שוות על ידי מלבנים בעלי אורך שווה. מתוך האיור בוחרים יחידה, במקרה זה סכום הכסף שקרול קיבלה, שבאמצעותה מייצגים את יתר נתוני הבעיה.

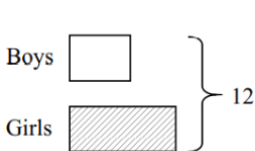
דוגמה 3 לשימוש בשיטת המודל

בכיתה של 40 תלמידים, 75% מהבנים ו- $\frac{2}{3}$ מהבנות הם בעלי טבֶּלֶט.
אם ל- 30% מהתלמידים אין טבֶּלֶט, מצאו את מספר הבנות שיש להן טבֶּלֶט.

פתרון בשיטת המודל:

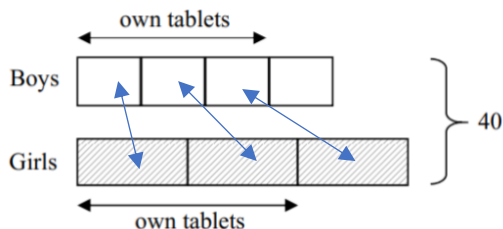


נחלק תחילה את הבנים בנפרד ואת הבנות בנפרד ליחידות של בעלי טבֶּלֶט וחסרי טבֶּלֶט (ראו איור).



מחישוב ישיר של 30% מהתלמידים אנחנו יודעים שיש 12 תלמידים ללא טבֶּלֶט.
אנחנו גם יודעים, על פי המודל, שתלמידים ללא טבֶּלֶט מהווים **יחידה אחת מהבנים ויחידה אחת מהבנות**.

מכאן, ביחידה משולבת המורכבת מיחידת בנים ויחידת בנות יש 12 תלמידים (כל חסרי הטבֶּלֶט).



יש בכיתה 3 יחידות משולבות כאלה (בנים + בנות), ביחד 36 תלמידים, ועוד יחידה של בנים (ראו תוספת חיצים).

נחסיר מסך תלמידי הכיתה את מספר התלמידים בשלוש יחידות משולבות. נקבל שרבע מהבנים שווה : $40 - 36 = 4$.

מכאן שבכיתה 16 בנים ו- 24 בנות.

מה דוגמה 3 מדגימה?

זו דוגמה מורכבת של שימוש בשיטת המודל. גם כאן שיטת המודל מאפשרת לעקוף את הצורך באלגברה. הפתרון מחייב להגדיר יחידה מורכבת.

9.2 נספח ב':

לקט משימות מתמטיות מתוך ספרי לימוד ומבחנים המדגימות מאפיינים של גישות פדגוגיות והזדמנויות ללמידה בשלוש המדינות

להלן אוסף משימות לימוד מתמטיות. לכל משימה מופיע המקור ממנה היא לקוחה, המשימה עצמה כלשונה (במסגרת), והסבר מה היא מדגימה. נציין כי רוב המשימות שבחרנו להביא בנספח הן משימות עם "רצפה נמוכה ותקרה גבוהה".

משימה 1

מקור: דוגמת מבחן (2018/19) לבוגרי כיתות ח (משימה 3), פולין (בתרגום חופשי) מתוך אתר משרד החינוך

מחירי נסיעה בתחבורה ציבורית

לקראת נסיעה מקרקוב לוורשה, אביו של ברטק בוחן כמה אמצעי תחבורה ישירים ישנם בין ערים אלו. ארבעת האפשרויות הקיימות מוצגות בטבלה הבאה:

מחיר הכרטיס	אורך המסלול	כלי התחבורה	שעת הגעה לוורשה	שעת יציאה מקרקוב
27 זלוטי	298 ק"מ	אוטובוס	6:30	1:35
60 זלוטי	293 ק"מ	רכבת	5:12	2:32
65 זלוטי	364 ק"מ	רכבת	8:48	5:00
49 זלוטי	293 ק"מ	רכבת	8:10	5:53

לכל היגד סמנו P אם הוא נכון ו-F אם הוא לא נכון:

P	F	מחיר הנסיעה שמשך הזמן שלה הקצר ביותר הוא 49 זלוטי.
P	F	לפי לוח הזמנים, רק הנסיעה באוטובוס נמשכת יותר מ-4 שעות.

מה משימה 1 מדגימה?

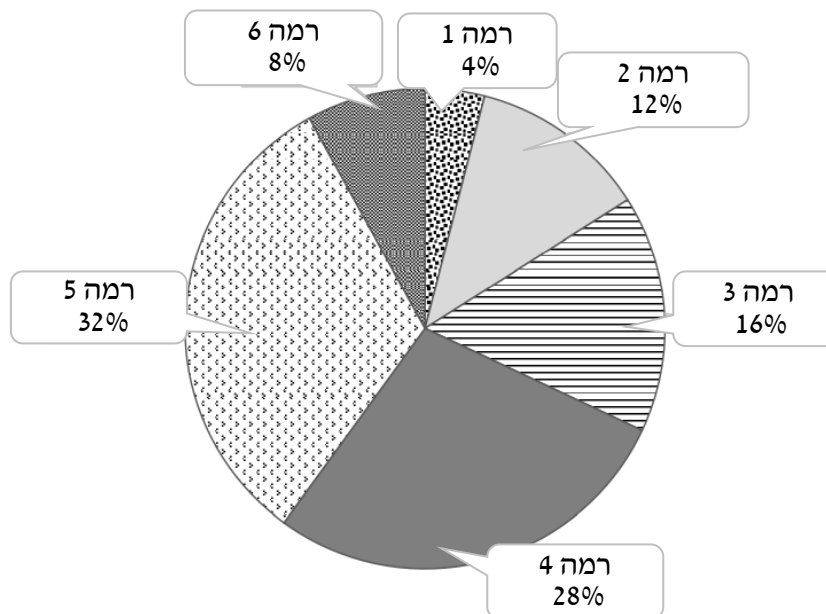
אחד הדגשים של החינוך המתמטי בפולין הוא לתת בידי התלמידים כלים שיאפשרו להם להשתמש במתמטיקה בחייהם ובפרט לתכנן זמנים ואפשרויות תחבורה. ההקשר של המשימה לחיים סביבם הוא מאד רלבנטי ואותנטי.

מקור : דוגמת מבחן (2018/19) לבוגרי כיתות ח, פולין (בתרגום חופשי) מתוך אתר משרד החינוך

חידון

לרגל יום הספר העולמי ארגנו תלמידי כיתות ז' חידון על דמויות ספרותיות. ניתן היה להשלים את החידון באחת מהרמות 1–6. התרשים הבא מראה כמה אחוזים מהתלמידים השלימו את החידון בכל רמה. בדיוק 32% מהתלמידים שהשתתפו בחידון סיימו את החידון ברמות נמוכות מהרמה של אסיה.

תוצאות החידון (ב%):



מהו אחוז התלמידים שהשלימו את החידון הזה ברמות גבוהות יותר מאשר אסיה? בחרו את התשובה הנכונה מבין הנתונים.

א. 40% ב. 32% ג. 28% ד. 8%

מה משימה 2 מדגימה?

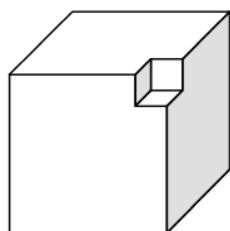
זוהי בעיה לא שגרתית שאינה מוכרת לתלמידים, ושעל פניה נראית פשוטה, למרות שהיא דורשת חשיבה כדי להבין מהיכן להתחיל. השאלה עוסקת באסיה, אך אסיה כלל לא נזכרת בנתונים. קודם כל צריך להבין שצריך לחבר את האחוזים מהרמה הנמוכה ביותר (שצריך לאתר בדיאגרמה) כדי להבין מיהן הרמות מתחת לאסיה, ואז להוסיף את אחוז התלמידים ברמה הבאה, שהיא הרמה של אסיה, ולבסוף להשלים ל-100% או לחבר את האחוזים ברמות שנותרו.

אמנם נתוני הבעיה מוצגים בצורה די מלאכותית, שאינה תואמת את הדרך המקובלת להצגת נתונים בסיטואציה כזאת, ובכל זאת רמת החשיבה הנדרשת הינה גבוהה כי נדרש חיפוש פתוח. בעיה זו מדגימה את המאפיינים של פולין.

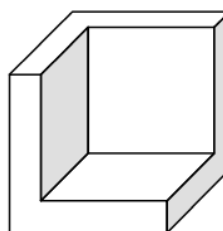
מקור : דוגמת מבחן (2018/19) לבוגרי כיתות ח (משימה 10), פולין (בתרגום חופשי) מתוך אתר משרד החינוך

שטח פנים

מכל אחת משתי קוביות זהות הוסרה קובייה והתקבלו הגופים המוצגים באיור הבא :



גוף 1



גוף 2

האם שטח הפנים הכולל של גוף 1 גדול משטח הפנים הכולל של גוף 2?

בחרו A (כן) או B (לא) ובחרו באחד הנימוקים 1, 2 או 3

הקובייה הראשונה הייתה קטנה מהקובייה השנייה.	1.	כי	כן	A
שטח הפנים הכולל של כל אחד מהגופים שהתקבלו שווה לשטח הפנים הכולל של הקובייה הראשונית.	2.			
שטח הפנים של "השקע" בקובייה השנייה (גוף 2) גדול משטח הפנים של "השקע" בקובייה הראשונה (גוף 1).	3.		לא	B

מה משימה 3 מדגימה?

השאלה מדגימה בעיה גיאומטרית שעבורה אין לתלמידים אסטרטגיית פתרון ידועה מראש.

יש 3 נימוקים אפשריים אבל לא נאמר איזה נימוק מתאים לאיזו תשובה.

משימה 4

מקור: פריטי הכנה למבחן לתלמידים בגיל 16 הלומדים במסגרת קדם מקצועית (VMBO) בהולנד. התרגום מתוך אתר משרד החינוך.

אפיה

א. הקוטר של תבנית האפייה העגולה בתמונה משמאל הוא 24 ס"מ וגובהה 5 ס"מ. הראו על ידי חישוב שנפח התבנית הוא 2262 סמ"ק.



ב. בתמונה משמאל רואים תבנית אפייה ריבועית. נפח תבנית זו גדול פי 1.3 מזה של תבנית האפייה העגולה. הגובה של תבנית זו גם הוא 5 ס"מ. חשבון את אורך הצלע של תבנית האפייה הריבועית. הציגו את החישוב שלכם ועגלו לסנטימטרים שלמים.

**מצרכים לעוגת תפוחים
בתבנית עגולה בקוטר 24 ס"מ**

300 גרם קמח תופח
175 גרם חמאה
150 גרם סוכר לבן דק
1 ק"ג תפוחים
1 ביצה

ג. לניקי יש מתכון לעוגת תפוחים (ראו במסגרת).

ניקי רוצה למלא את שתי תבניות האפייה בבליחה. היא צריכה פי 1.3 בְּלִיָּחָה לתבנית האפייה המרובעת מאשר לתבנית האפייה העגולה. יש לה את כל המרכיבים בהישג יד, חוץ מהקמח התופח. בחנות מוכרים את זה באריזות של 500 גרם.

ד. ניקי רוצה לחלק את העוגה המרובעת ל-12 חתיכות בגודל שווה. הדגימו בציור איך היא יכולה לחתוך את העוגה המרובעת (על קובץ מצורף המציג את התבנית במבט מלמעלה).

ה. פאי התפוחים העגול מחלק אותם ל-12 נקודות שוות.

חשבו את זווית הגזרה של כל פרוסה. רשמו את החישוב שלכם.

מה משימה 4 מדגימה?

המשימה מצריכה חישוב בהקשר מציאותי שימושי, שהתלמידים כבר התנסו בו או יתנסו בו בהמשך חייהם. על מנת להשיב על השאלות, יש צורך בחשיבה ובחיפוש פתוח כדי להבין איזה פעולות יש לבצע.

זו סידרה של שאלות שכולן מעוגנות באותו הקשר מציאותי אך לא כולן עוסקות באותו תחום מתמטי. זאת בהתאם לעיקרון של הגישה הריאליסטית להוראת מתמטיקה (RME), על פיו תחומים שונים של מתמטיקה לא צריכים להילמד בנפרד.

משימה 5

מקור: פריטי הכנה למבחן לתלמידים בגיל 16 הלומדים במסגרת קדם מקצועית (VMBO) בהולנד. התרגום מתוך אתר משרד החינוך.

הקולנוע

נָדִין הולכת לקולנוע עם בעלה ושני ילדיהם, בני 6 ו-9 שנים.

הטבלה משמאל מציגה את עלות הכרטיס לאדם לביקור בקולנוע.

נָדִין יכולה לקנות כרטיס משפחתי ל-2 מבוגרים ו-2 ילדים עד גיל 11. המחיר של כרטיס משפחתי הוא 29 יורו.

מחיר	גיל
10.50 יורו	מבוגר
9.00 יורו	11 עד 17 שנים
8.00 יורו	עד 11 שנים

א. חשבו בכמה אחוזים כרטיס משפחתי זול יותר עבור נָדִין מאשר ארבעה כרטיסים נפרדים. רְשְׁמו את החישוב שלכם.

הקולנוע מוכר גם כרטיסיות פתוחות. כל ביקור בקולנוע כרוך בניקוב פס אחד מתוך הכרטיסייה. מחיר כרטיסייה עם 5 פסים הוא 38 יורו ומחיר כרטיסייה עם 10 פסים הוא 70 יורו.

ב. חשבו בכמה זול יותר ביקור בקולנוע של אדם עם כרטיסייה בעלת 10 פסים בהשוואה לביקור בקולנוע של אדם עם כרטיסייה בעלת 5 פסים. רשמו את החישוב שלכם.

ג. עבור ממתקים משלמים בקולנוע 1.60 יורו ל-100 גרם. נָדִין קנתה 265 גרם סוכריות.

חשבו כמה יורו נָדִין צריכה כדי לשלם עבור הממתקים. רְשְׁמו את החישוב שלכם.

ד. נָדִין החנתה את מכוניתה בחניון חצי שעה לפני תחילת הסרט. הסרט נמשך 96 דקות ובנוסף הייתה הפסקה של 12 דקות. לאחר הסרט עברו עוד 6 דקות עד שנָדִין הגיעה למסוף התשלומים בחניון. התעריף לחניון זה הוא 1.25 יורו ל-24 דקות.

חשבו כמה יורו נָדִין צריכה כדי לשלם עבור החניה. רשמו את החישוב שלכם.

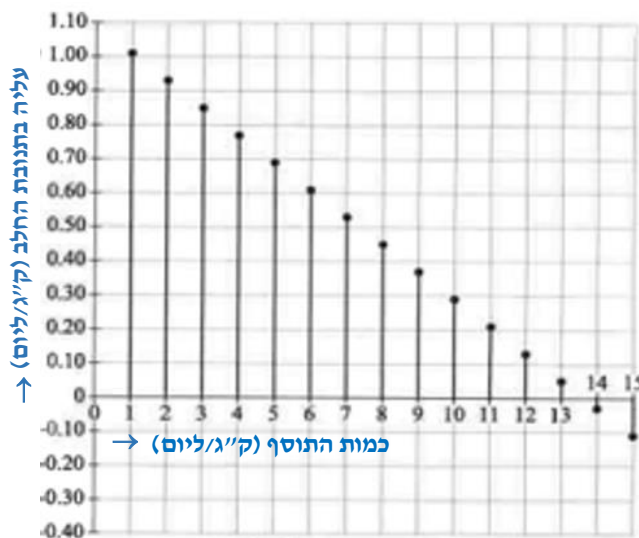
מה משימה 5 מדגימה?

השאלה עוסקת בהתנהלות כלכלית, בכלל זה מציאת האלטרנטיבה הזולה ביותר מתוך מגוון אפשרויות בחירה.

משימה 6

מקור: בחינת בגרות ברמת HAVO בהולנד לתלמידים העתידיים ללמוד באוניברסיטאות למדעים יישומיים. (רמה אחת לפני הגבוהה ביותר)

תזונה ותנובה של פרות חולבות



התזונה של פרות ברפת מורכבת בדרך כלל ממרכיבי ירק כמו עשב וחציר. במטרה להשביח את החלב הפרות מקבלות תוסף מזון מרוכז.

במחקר של אוניברסיטת וושינגטון יחד עם מכון מחקר נחקרה ההשפעה של כמות התוסף המרוכז ליום על תנובת החלב. תוצאות המחקר מתוארות בגרף התוספות (ראו גרף משמאל). בגרף שלפניכם אפשר לראות, למשל, שכמות החלב גדלה ב- 0.93 ק"ג כאשר מעלים את כמות התוסף המרוכז מק"ג אחד ל- 2 ק"ג.

בכמות מסוימת של חומר מרוכז, תנובת החלב היא בשיאה. בעזרת הגרף מצאו את הכמות הזאת. הסבירו את שיקולכם.

(המשימה ממשיכה לשאלות בנושא של שיקולי רווחיות, לאחר שהתלמידים מקבלים מידע על מחירי החלב ועל ההוצאות של מגדלי הפרות).

מה משימה 6 מדגימה?

למרות שלא מדובר בשאלה המיועדת לתלמידי חטיבת הביניים או לתלמידים בגיל קרוב בחרנו להביא דוגמה זו כדי להראות ששימוש במשימות בהקשר מציאותי לא נפסק בחטיבת הביניים, ורוב השאלות בבחינות הבגרות הן כאלה.

בנוסף, השאלה הזאת מדגימה עיקרון נוסף של הוראת המתמטיקה בהולנד: השימוש בהקשרים המציאותיים לא נועד רק מסיבות יישומיות או כדי להעלות בעיני התלמידים את הכוח של המתמטיקה בעולם המעשה. בגישת RME השימוש בהקשרים מעשיים נועד בראש ובראשונה כדי להעמיק את ההבנה של המושגים המתמטיים עצמם. בדוגמה זו ניתן לראות שתנובת החלב היא מקסימלית כאשר קצב השינוי של תנובת החלב יורד והופך מחיובי לשלילי. כאן ההקשר המציאותי הוא אינטואיטיבי – ברגע שתוספת נוספת של תוסף המזון כבר לא מעלה את כמות החלב אלא מורידה אותו, עברנו את שיא תנובת החלב. במילים אחרות, שאלה כזו מחזקת את ההבנה שבנקודת מקסימום של פונקציה הנגזרת מתאפסת, והמגמה שלה היא מחיובית לשלילית. שאלות מסוג זה מאפיינות בגישת RME הצגה של מושגים או עקרונות חדשים.

הצעות מחיר לשיפוצים ביתיים

גיים הוא מומחה בשיפוץ בתים קטנים, שניתן לבצע בפחות מיום עבודה. במרבית עבודותיו הוא מעסיק צוות של 3 אנשים. הוא גובה 37 דולר עבור שעת עבודה ובנוסף 25 דולר הוצאות נסיעה.

1. חשבו את המחיר של העבודות הבאות:

א. החלפת צינורות אצל מר אשטון: 3 שעות.

ב. ניקוי הצינורות אצל רודריגז ושות': 21-22 שעות.

ג. החלפת ברזים בבית וונדר: 3-4 שעות

לפעמים אנשים מבקשים מגיים הצעות מחיר. לאור הניסיון הרב שלו הוא יודע להעריך כמה שעות יידרשו לכל תיקון ומשתמש בטבלה הבאה כדי להעריך את העלות.

מספר שעות העבודה	עלות העבודה (בדולרים)	עלות ההסעה (בדולרים)	עלות לעובד (בדולרים)	תשלום ל- 3 עובדים (בדולרים)
1	37	25	62	186
2	74	25	99	297
3	111	25	136	408
4	148	25	173	519
5				

2.

א. מה מייצגות הכותרות של העמודות בשורה העליונה של הטבלה?

ב. הוסיפו שורה בטבלה עבור 5 שעות עבודה.

3.

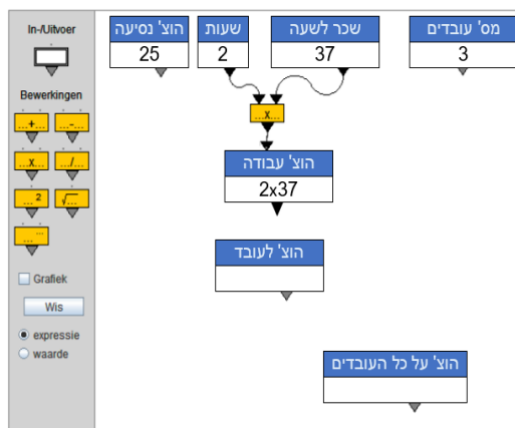
א. הסבירו את החוקיות בעמודה של העלות לעובד.

ב. חקרו את הטבלה ורשמו כל חוקיות שאתם מגלים.

4.

א. בתרשים שמשמאל, סרטטו חיצים שגיים היה יכול להשתמש בהם, על מנת לייצר יותר שורות של הטבלה.

ב. השתמשו בדיאגרמת החיצים כדי להוסיף עוד שורות לטבלה עבור 6 ו-7 שעות עבודה.

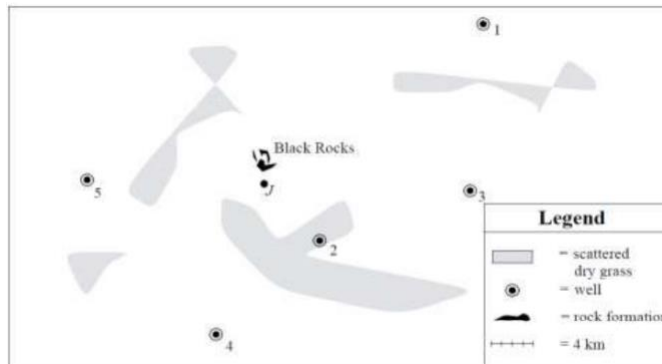


מה משימה 7 מדגימה?

זו משימה שעוסקת במציאת חוקיות ומעבר הדרגתי לביטוי המתמטי שלה, בהקשר של התנהלות כלכלית. בפרט, כדאי לשים לב לסעיף 4 שמפתח אצל התלמידים חשיבה מחשובית, באמצעות סוג של תרשים זרימה.

צמד פעילויות על מרחקים ואנך אמצעי

צמא במדבר



במפה מסומנות בארות. יש 5 בארות בסביבה. אתה צמא מאוד וכל מה שיש לך זו המפה הזאת.

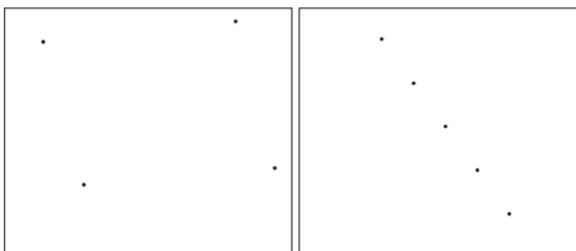
1. לאיזו באר תלך?

2. סמנו את האזור שבאר מס' 2 היא הקרובה ביותר לכל הנמצאים בו.

מחוזות



Other province capitals



באיור משמאל מוצגת חלוקה מחודשת של הולנד לפרובינציות.

3. איך נוצרו הגבולות של הפרובינציות? איך תוכלו למצוא אותם באמצעות קיפולי נייר?

4. איזו תכונה יש לשלוש הערים המודגשות במפה?

5. בכל אחד משני החלונות שמשמאל, הנקודות המסומנות מייצגות ערי בירה של פרובינציות. מצאו את גבולות הפרובינציות האלה.

6. הציעו סידור מיוחד של ערי בירה שיוביל לעוד סידור מיוחד של פרובינציות.

מה משימה 8 מדגימה?

המשימה הזאת עשירה במיוחד ומדגימה מספר עקרונות של גישת RME להוראת מתמטיקה:

- התלמידים מגלים לעצמם (reinvent) את המתמטיקה שהם לומדים.
- הקשר שבו המתמטיקה הנלמדת נתפסת כבעלת ערך ומעניינת
- למידה פעילה ושימוש בהמחשה פיזית
- רמת חשיבה גבוהה שיש בה גם חיפוש פתוח של דרך פעולה, וגם, בסעיף האחרון, הזדמנות לחקור מקרים נוספים על פי בחירת התלמיד.

משימה 9

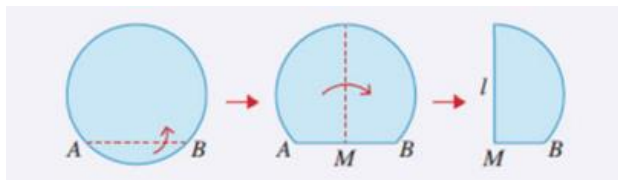
מקור: Yeo et al. (2019)

השאלה במקור מתוך הספר:

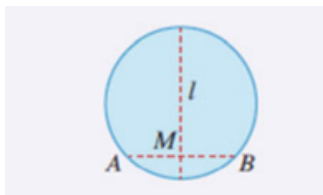
Textbook investigation on symmetric property of circle (reproduced with permission from Shing Lee Publishers Pte Ltd.), Fig. 8.14.

חקירת מעגל עם קיפולי נייר

(משימה זו היא חלק מרצף משימות שאינו מופיע במלואו בנספח)



1. השתמשו באותו עיגול כמו [בשאלה קודמת] וקפלו אותו לאורך מיתר שאינו קוטר, ואז קפלו אותו לשני חלקים שווים כמודגם באיור.



2. פתחו את הקיפול כמודגם באיור שמשמאל. קווים מרוסקים מציינים קווים שנוצרו מקיפולי נייר.

3. כשנייר מקופל לשני חלקים שווים, הישר l חוצה את המיתר AB ואת הזווית $\angle AMB$. מכיוון ש- $\angle AMB = 180^\circ$, הישר l מאונך למיתר AB .

א. איזה מהתנאים [הפנייה לעמוד קודם עם רשימת תנאים] מתקיימים?

ב. האם הישר l עובר דרך מרכז המעגל שסימנת בשאלה 5 [קודמת]?

מה משימה 9 מדגימה?

- רצף משימות שבנוי לפי העיקרון של CPA (CPA – Concrete, Pictorial, Abstract), המאפיין מפגש עם מושגים חדשים במתמטיקה בסינגפור. הרצף מתחיל בעבודה עם חומרים מוחשיים, עובר להדגמת הפעולות שנעשו באמצעים ויזואליים, ולבסוף עובר למסקנות מופשטות.
- רצף המשימות מסינגפור מתוכנן כך שכל מה שדרוש לתלמידים לפתרון יהיה באמתחתם עם קבלת המשימה וניתן לראות שהמשימות כוללות מידע שעוזר להם בפתרון.

משימה 10

מקור: Quek & Fan (2009), p.435

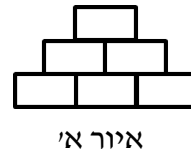
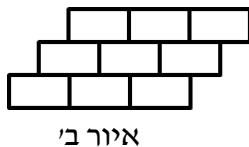
לִבְנִים לְבִנְיַת קִיר

קבוצת פועלי בנין בונים קיר מִלִּבְנִים. על מנת שהקיר יהיה יציב, צריך להניח את הלבנים בסידור מיוחד, כפי שמופיע בתמונה (משמאל):



תרגילים לחימום:

1. רשמו את המספר הכולל של לבנים בכל אחד מהתיאורים הבאים – איור א' ואיור ב'.



2. ערמה של לבנים מסודרת כמו באיור א'. בשורה העליונה יש 4 לבנים ובתחתונה 10 לבנים. כמה לבנים יש בסך הכל בערמה הזאת?

* הידעתם?

ערמה של לבנים מסודרת באופן שמספר הלבנים בכל שורה קטן באחד ממספר הלבנים בשורה מתחתיה. אם השורה העליונה מכילה p לבנים והשורה התחתונה מכילה q לבנים, אז אפשר לחשב את המספר הכולל של לבנים בערמה לפי הנוסחה:

$$(p + q) \cdot (q - p + 1) \div 2$$

השתמשו בנוסחה הזאת כדי לבדוק את תשובותיכם לשאלה 1 ושאלה 2.

3. ערמה של לבנים מסודרת כמתואר קודם. ידוע שמספר הלבנים בערמה הוא 30, ומספר הלבנים בשורה העליונה הוא זוגי.

ציירו את כל הסידורים האפשריים ולכל סידור ציינו את מספר הלבנים בשורה העליונה ובשורה התחתונה. (רמז: אפשר להשתמש בנוסחה שהופיעה בסעיף הקודם).

מה משימה 10 מדגימה?

זו משימה שעוסקת במציאת חוקיות גיאומטרית, בהקשר מציאותי של בינוי. בהתחלה היא מאפשרת חיפוש פתוח, אולם בשלב מסוים מכוונים את התלמידים לשימוש בנוסחה, שלא ברור אם הם כבר למדו אותה בעבר או שרק מספקים להם אותה בצורה מוגמרת.