

ניתוח המסגרת המושגית של פיז"ה וקישורה לתכנית הלימודים בארץ

פרופ' אורית זסלבסקי, אוניברסיטת ניו יורק והטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
ד"ר גילה רון, מכללת אוהלו
ד"ר איריס זודיק, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

תקציר מנהלים

המטרה המרכזית שעמדה לנגד עינינו במחקר שערכנו הייתה לבחון באיזו מידה וכיצד ניתן לעשות אינטגרציה בין המסגרת המושגית של פיז"ה לבין הוראת המתמטיקה בחטה"ב, בדגש על פיתוח חשיבה מתמטית מסדר גבוה בקרב תלמידי חטה"ב. לשם כך ניתחנו מסמכים וערכנו סקר ספרות מקיף. המסמכים שניתחנו לצורך זה כללו: (1) מסמכים רשמיים המתארים ומפרטים את המסגרת המושגית של פיז"ה; (2) מסמכים רשמיים הקשורים לתכנית הלימודים במתמטיקה לחטה"ב, לרבות מסמכים נלווים כגון חוזרי מפמ"ר ומדגם של מבחנים רשמיים מטעם משרד החינוך; (3) ספרות מקצועית בינלאומית – תיאורטית ומחקרית – הקשורה להשפעה של פיז"ה ברחבי העולם, למושגים המרכזיים במסגרת של פיז"ה ולגישות להוראת מתמטיקה.

המסגרת של פיז"ה מדגישה את המקום המרכזי של חשיבה מתמטית בתהליכי פתרון בעיות, בכלל, ובאוריינות מתמטית, בפרט. בבסיס המסגרת הקונספטואלית של פיז"ה נמצאת האוריינות המתמטית וכל יתר המושגים, הרעיונות והתכנים המתמטיים סובבים סביבה. אוריינות מתמטית לפי פיז"ה היא:

"יכולתו של הפרט לחשוב חשיבה מתמטית ולנסח, ליישם ולפרש מתמטיקה כדי לפתור בעיות במגוון הקשרים מהעולם האמיתי. היא כוללת מושגים, פרוצדורות, עובדות וכלים שמטרתם לתאר, להסביר ולחזות תופעות שונות. היא מסייעת לאנשים להבין את תפקידה של המתמטיקה בעולם ולגבש דעות והחלטות מבוססות כמתבקש מאזרחים תורמים, מעורבים וחושבים במאה ה-21.

מהמסגרת של פיז"ה עולה שאוריינות מתמטית קשורה לבעיות מהעולם האמיתי ולמידול. מידול עוסק בפתרון בעיות מהמציאות בכלים מתמטיים, ומחייב מעברים בין העולם המתמטי לעולם האמיתי. מעגל המידול, לפי פיז"ה, כולל שלושה תהליכים מרכזיים: ניסוח, יישום, ופירוש והערכה. חשוב לציין שלא כל בעיה שמעוגנת בסיטואציה מחיי היום-יום היא בעיה אוריינית, ולהפך. בעיה אוריינית יכולה להתרחש בתוך העולם המתמטי (למשל, במעבר בין ייצוגים שונים). עם זאת, הדגש במסגרת של פיז"ה הוא על בעיות מהעולם החוץ-מתמטי.

אין במסגרת של פיז"ה התייחסות לאופן שבו יש ללמד כדי להשיג את המטרות של פיז"ה. יתרה מזאת, אין גישת הוראה אחת שמוסכם עליה שהיא "הטובה מכולן" ללימוד מתמטיקה, בכלל, ולפיתוח אוריינות מתמטית, בפרט. רוב הגישות נמצאות על רצף, ובדרך כלל לא מדובר בדיכוטומיה. לכן, נכנסנו לעובי הקורה כדי להבין אילו גישות הוראה יכולות לתמוך בהשגת מטרות העל של פיז"ה, ובפרט – באילו דרכים ניתן לפתח אוריינות מתמטית במובנה המלא. לשם כך, בחנו קריטריונים אחדים לאפיון גישות הוראה שיש להן פוטנציאל לפיתוח אוריינות מתמטית ברוח פיז"ה, בהתאם לחמש שאלות מנחות: מי עומד במרכז ההוראה? מהי הוראה יעילה? איך קושרים בין העולם המתמטי לעולם החוץ-מתמטי? מה הקשר בין למידת חקר לאוריינות מתמטית? ומה מקומן וטבען של משימות מתמטיות בתהליך ההוראה?

להלן המסקנות העיקריות לגבי גישות לפיתוח אוריינות מתמטית:

- כדי לפתח אוריינות מתמטית, חשוב שסביבת הלמידה תהיה ממוקדת תלמיד.
- שלושה מאפיינים של הוראה יעילה בולטים במיוחד ברלוונטיות שלהם לסביבת למידה תומכת אוריינות מתמטית: שילוב משימות מתמטיות המקדמות חשיבה מתמטית ויכולת פתרון בעיות; קישור בין ייצוגים מתמטיים כאמצעי להעמקת ההבנה; העמדת אתגרים מתמטיים ללומד ותמיכה בהתחבטויות לגביהם ובהתמודדות פרודוקטיבית איתם. בנוסף, כמובן, חשוב ליצור שיש מתמטי משמעותי ולעודד תקשורת בין התלמידים ובינם למורה.
- יש שתי גישות מרכזיות לפיתוח אוריינות מתמטית, הנבדלות באופן הקישור בין העולם המתמטי לעולם החוץ-מתמטי. לפי הגישה הראשונה (הנשענת על הגישה שנקראת RME (Realistic Mathematics Education), יוצאים מהעולם האמיתי ומצמיחים ממנו כלים ועקרונות מתמטיים תוך כדי תהליך של פתרון בעיות. לפי הגישה השנייה, יוצאים מהעולם המתמטי, ומיישמים עקרונות וכלים מתמטיים לבעיות המעוגנות בסיטואציות מהעולם האמיתי. שתי הגישות מאפשרות פיתוח אוריינות מתמטית ברמה גבוהה ברוח פיז"ה, אולם תנאי לכך הוא שהתנסויות עם משימות אורייניות יכללו בשגרת ההוראה ושתהיה להן מסה קריטית.

- יש קשר הדוק בין למידה מבוססת חקר (IBL: Inquiry-Based Learning) לבין אוריינות מתמטית במלוא מובנה. בלמידה מבוססת חקר נכללים למידה מבוססת פתרון בעיות (PBL: Problem-Based Learning), למידה מבוססת מידול (Mathematical Modeling), ולמידה מבוססת פרויקטים (Project-Based Learning). הדמיון ביניהן רב על השוני. שאלה שעולה במקרים רבים ביחס ללמידה מבוססת חקר קשורה ליעילות שלה מבחינת ניצול הזמן. באופן כללי, אפשר ומתאים לפתח אוריינות מתמטית בסביבת למידה מבוססת חקר, אולם בגלל האתגרים המורכבים שלמידה מסוג זה מעמידה למורה, יישום של גישות חקר בלמידה מתמטית מחייב הכשרה מיוחדת וליווי מקצועי של המורים.

- בכל גישה שנוקטים, חשוב לקחת בחשבון שלמשימות הלימוד יש השפעה מכרעת על אופיין וטיבן של ההזדמנויות ללמידה, והן משקפות ומעצבות את דרכי הוראת המתמטיקה. משימות שהן לכאורה אורייניות, יכולות להיות שונות בתכלית – החל מאוריינות במלוא מובנה וכלה בקשר רופף ושטחי למציאות ושאלות נלוות שאינן הגיוניות. בחירה ובנייה של משימות אורייניות אותנטיות, ובפרט – משימות אורייניות עם דרישה קוגניטיבית ברמה גבוהה, היא מלאכה מורכבת. בנוסף, מידת המימוש של הפוטנציאל של משימה לימודית תלויה באופן שבו המורה מיישם ומנווט אותה בכיתה.

לאור חשיבותה של האוריינות המתמטית במסגרת של פיז"ה, בדקנו מה מקומה בתכנית הלימודים במתמטיקה. בגלל הזיקה בין אוריינות מתמטית לבעיות מחיי היום-יום, ניתחנו משימות מתכנית הלימודים שיש להן נגיעה לעולם האמיתי, ומצאנו שונות רבה בין המשימות שאיתרנו, במגוון רחב של מאפיינים. מכאן עלה הצורך לפתח מערכת קטגוריות לאפיון משימות אורייניות, או כאלה שלמראית עין קשורות לעולם האמיתי. החשיבות של מערכת כזאת נעוצה במקומן המרכזי של משימות לימוד בתהליכי ההוראה והלמידה ובידיעה שללא ניתוח מעמיק של הפוטנציאל הגלום במשימה, קשה לקבוע באיזו מידה היא עשויה לסייע לקידום המטרות של פיז"ה ולפיתוח חשיבה ברמה גבוהה. המערכת שפיתחנו כוללת שש קטגוריות מרכזיות, ומהווה תוצר חשוב של המחקר. אפשר להשתמש בו, כפי שנעשה במסגרת המחקר הנוכחי, כדי לאפיין ולהעריך את מידת ההלימה בין מאפייני המשימה למסגרת הקונספטואלית של פיז"ה ואת הפוטנציאל שלה לפיתוח אוריינות ורמות חשיבה גבוהות. שש הקטגוריות הן: 1. סוג הקשר של הבעיה לעולם המציאותי; 2. תהליכי המידול הנדרשים; 3. רמת הדרישה הקוגניטיבית של המשימה; 4. נגישות המשימה לתלמידים ברמות שונות; 5. רמת האוריינות והקשר למטרות העל של פיז"ה; 6. דרכים למינוף המשימה. הקטגוריה האחרונה נשענת על יתר הקטגוריות ומשקפת את התפיסה שיש להתייחס למשימה כבסיס לשיפור ולמינוף. קטגוריה זו יכולה לשמש כגשר מעשי לאינטגרציה הרצויה בין המסגרת הקונספטואלית של פיז"ה לבין הוראת המתמטיקה בחטה"ב.

בנוסף לאיתור משימות אורייניות, ניתוח תכנית הלימודים במתמטיקה לחטה"ב התמקד באיתור התייחסויות לאוריינות מתמטית (וכחלק ממנה – גם למידול), בין אם במפורש או באופן לא מפורש, ובחינת ההתייחסות לפיתוח הבנה והנמקה מתמטיות, שחשיבותן מודגשת במסגרת הקונספטואלית של פיז"ה. הניתוח העלה שתכנית הלימודים במתמטיקה לחטה"ב על כל חלקיה שמה דגש על למידה לשם הבנה ועל הנמקות והצדקות. לגבי אוריינות מתמטית, מצאנו התייחסויות אליה, אך כי היא איננה מודגשת די הצורך, ולרוב לא במובן המלא שלה. רוב המשימות המובאות במסמכים שניתחנו, שיש להן קשר לעולם האמיתי, מיישמות כלים מתמטיים שנלמדו כבר לסיטואציות מחיי היום-יום, ואינן משמשות נקודת מוצא לבניית מושגים ועקרונות מתמטיים מתוך סיטואציות מחיי היום-יום.

להלן המסקנות העיקריות לגבי מקומה של אוריינות מתמטית בתכנית הלימודים:

- המשימות הרווחות בתכנית הלימודים והקשורות לסיטואציות מהעולם האמיתי, מבטאות דרגות שונות של אוריינות ואינן בהכרח משקפות סיטואציות שנתפסות כמתקבלות על הדעת או אותנטיות. לכן, יש חשש שמורים יתייחסו לכל בעיה שיש בה תיאור של סיטואציה מהעולם האמיתי כאילו היא משימה אוריינית.
- בגלל המיקום הנפרד והשולי יחסית של אוריינות בתכנית הלימודים, יש חשש שמורים יראו במשימות אורייניות בעיקר אמצעי להכין את התלמידים למבחן פיז"ה. זאת במקום לסגל את האוריינות כ"אורח חיים", ולחנך את תלמידיהם להתבונן סביבם "בעין מתמטית".

- מיעוט ההקשרים מן העולם האמיתי וההזדמנויות לעסוק במידול, במובן שמתואר במסגרת של פיז"ה, עלול להגביל את ההתפתחות של שני היבטים מרכזיים של אוריינות מתמטית, לפי פיז"ה, שהן היכולת של התלמידים להעריך את כוחה של המתמטיקה לפתור בעיות בהקשר של העולם האמיתי, וההרגל להתבונן בעולם האמיתי "בעין מתמטית".

- תכנית הלימודים מפתחת כישורים רבים המופיעים במסגרת של פיז"ה, ומדגישה חשיבה מתמטית ולימוד לשם הבנה. ממצאים אלה מצביעים על כך, שהמאמץ להרחיב כישורים אלה, כך שיתאימו גם לסיטואציות מהעולם האמיתי, הוא כנראה בר השגה.

על בסיס הממצאים והמסקנות שהעלינו, גיבשנו המלצות לגבי דרכי פעולה שיכולות לקדם אוריינות מתמטית ברמה גבוהה לפי המסגרת של פיז"ה. ההמלצות שגיבשנו עוסקות בתכנית הלימודים במתמטיקה – המוצהרת והמיושמת, ובהכשרה וליווי של מורים למתמטיקה, במגמה לקדם את החזון והמטרות של פיז"ה.

להלן ההמלצות העיקריות:

- כדי שהתנסויות עם משימות אורייניות ייכללו בשגרת ההוראה ושתהיה להן מסה קריטית, חשוב להדגיש יותר את החשיבות של אוריינות מתמטית בתכנית הלימודים. זאת על ידי הוספת פרקי לימוד לרשימת הפרקים שמומלץ לשלב בהם משימות אורייניות, הוספת משימות אורייניות ברמה קוגניטיבית גבוהה, ושילוב משימות הקשורות לעולם האמיתי בצורה יותר אוריינית גם במבחנים הרשמיים של משרד החינוך.

- כדי לקבל תמונה יותר ברורה על מה שמיושם בבתי הספר, או לפחות מה שקיים (בספרי הלימוד) ורק צריך להפיח בו רוח חיים, מומלץ לנתח את ספרי הלימוד המקובלים בבתי הספר, ולאתר בהם הזדמנויות לפיתוח אוריינות מתמטית ברמה גבוהה. מערכת הקטגוריות שפיתחנו יכולה לשמש כלי לניתוח ולמינוף משימות מספרי הלימוד.

- כדי שהמורים למתמטיקה יוכלו לשלב את האוריינות המתמטית בצורה מושכלת בהוראה, חייבים לצייד אותם (ורצוי גם את פרחי ההוראה) בכלים ובידע הדרושים לכך. ראשית, הם צריכים לפתח בעצמם "חוש לאוריינות". בנוסף, צריכה להיות להם מודעות לחשיבות של פיתוח אוריינות מתמטית אצל התלמידים, יכולת לאפיין ולהעריך משימות מחיי היום-יום לפי הפוטנציאל שלהן לפתח אוריינות ברמה גבוהה, ויכולת להתאים ולשנות משימות מחיי היום-יום כך שהפוטנציאל שלהן לפיתוח אוריינות אצל התלמידים יגדל. כמו כן, חשוב שהמורים יידעו, איך לממש את הפוטנציאל של משימות מתמטיות ולשמור על רמת הדרישה הקוגניטיבית שלהן, תוך ניווט ההוראה בכיתה. מערכת הקטגוריות שפיתחנו יכולה לסייע למורי המורים בעבודתם עם המורים למתמטיקה.

לסיכום, המסגרת הקונספטואלית של פיז"ה מתווה יעדים וחזון שחשוב לדעתנו (ולדעת רבים) לחתור אליהם. בפרט, פיתוח חשיבה מתמטית ברמה גבוהה, יכולת לפתור בעיות ולקבל החלטות מושכלות במגוון הקשרים מחיי היום-יום, והבנת כוחה ותפקידה של המתמטיקה בעולם סביבנו. מהמחקר שערכנו עולה כי יש תשתית בתכנית הלימודים ובחומרים הנלווים להתקדם בכיוונים אלה. לא מדובר ב"הכל או לא כלום", אלא ברצף. גם לא מדובר בשינויים מרחיקי לכת. צריך להשקיע עוד בפיתוח משאבי הוראה ולמידה ובהנחיית מורים, כדי לבסס את מקומה של האוריינות המתמטית בתכנית הלימודים, בתקווה שהיא תהפוך לאורח חיים.

עמוד	תוכן עניינים
5	1. פתח דבר
6	2. המסגרת התיאורטית של פיז"ה 2021
6	2.1 אוריינות מתמטית
8	2.2 מידול ומתמטיזציה
11	3. גישות הוראה ורמות חשיבה במתמטיקה
12	3.1 מי עומד במרכז ההוראה?
12	3.2 מהי הוראה יעילה במתמטיקה?
13	3.3 איך קושרים בין העולם המתמטי לעולם החוץ-מתמטי?
15	3.4 מהי הקשר בין למידת חקר לאוריינות מתמטית?
16	3.5 מה מקומן וטבען של משימות מתמטיות בתהליך ההוראה?
16	3.5.1 אפיון משימות לפי הקשר שלהן למציאות
18	3.5.2 אפיון משימות לפי רמת הדרישה הקוגניטיבית שלהן
20	3.5.3 מערכת הקטגוריות שפותחה לניתוח משימות אורייניות
22	4. ביקורת על פיז"ה
23	5. ההשפעה של פיז"ה על תכנית הלימודים בישראל
24	6. קשרים בין תכנית הלימודים בישראל לאוריינות מתמטית לפי פיז"ה
25	6.1 התייחסות מפורשת לאוריינות בתכנית הלימודים במתמטיקה לחטיבת הביניים
26	6.2 התייחסות לא מפורשת לאוריינות בתכנית הלימודים במתמטיקה לחטיבת הביניים
28	6.3 התייחסות בתכנית הלימודים לתהליכים מרכזיים של מעגל המידול
28	6.3.1 ניסוח
28	6.3.2 יישום
29	6.3.3 פירוש והערכה
31	6.4 המבחנים הרשמיים כמשקפים את מקומה ומאפייניה של האוריינות המתמטית
32	7. סיכום – ממצאים, מסקנות והמלצות
32	7.1 ממצאים ומסקנות לגבי מקומה של אוריינות מתמטית בתכנית הלימודים
32	7.1.1 ממצאים עיקריים מניתוח תכנית הלימודים לחטה"ב
33	7.1.2 מסקנות מניתוח תכנית הלימודים לחטה"ב
33	7.2 גישות להוראת מתמטיקה היכולות לפתח אוריינות מתמטית
35	7.3 המלצות
37	8. רשימת מקורות (References)
40	נספח: מערכת הקטגוריות שפותחה לניתוח משימות אורייניות

1. פתח דבר

מחקר פיז"ה נערך על-ידי ארגון ה-OECD ומשתתפות בו מדינות מכל רחבי העולם. המחקר בודק את רמת האוריינות של תלמידים בני 15 בשלושה תחומים שונים: קריאה, מתמטיקה ומדעים. המחקר בוחן באיזו מידה תלמידים הקרובים לסוף חינוך חובה (במרבית המדינות) רכשו כלי חשיבה חיוניים והבנה של תכנים מתמטיים באופן המאפשר התמודדות טובה ויעילה עם סביבתם, ולא דווקא באיזו מידה רכשו ידע ותכנים ספציפיים המצופים עפ"י תכנית לימודים זו או אחרת. המחקר נערך במחזוריות של שלוש שנים. אחת לשלוש שנים נבדקים שלושת תחומי האוריינות, אך בכל פעם מושם דגש מיוחד על אחד משלושת התחומים (קריאה, מתמטיקה ומדעים). המתמטיקה הייתה תחום מרכזי בשנים 2003 ו-2012, ותחזור להיות תחום מרכזי בסבב הבא שתוכנן ל-2021 ונדחה ל-2022.

החזון המשתמע מהמסגרת המתמטית של פיז"ה הוא להכין את התלמידים ולפתח את יכולתם "להבין את תפקידה של המתמטיקה בעולם ולגבש דעות והחלטות מבוססות, כמתבקש מאזרחים תורמים, מעורבים וחושבים במאה ה-21". הצורך להגשים את החזון הזה הולך ומתעצם בתקופה זו, שבה חשוב להבין באופן ביקורתי את שלל הנתונים והפרשנויות השונות והמנוגדות המתפרסמים אודות התפשטות המגיפה וממדי התחלואה, המוחלטים והיחסיים, ברחבי העולם.

בתקופה זו אנו מזהים רוחות של שינוי המשפיעות על חיינו ועל החינוך המתמטי. אנחנו מוקפים ומוצפים בהרבה מאד מידע נגיש. הרבה פעולות שבעבר נעשו באמצעות מפות, טבלאות ועוד, נעשות היום בנגיעה באפליקציית מחשב. חלק גדול מהבעיות השגרתיות שהיינו צריכים לפתור בכוחות עצמנו אפשר לפתור בעזרת מכונה. מכאן נובע שחשוב להכין תלמידים להתמודד עם בעיות לא שגרתיות (non-routine) מהחיים, שדורשות חשיבה אסטרטגית מעבר לידע פרוצדורלי.

אחת התופעות הבולטות במאה ה-21 היא ריבוי השקרים והחדשות הכוזבות אליהם נחשפים אזרחים ברחבי העולם. השקרים הפכו לכלי אצל פוליטיקאים והם עושים בו שימוש רב, בנוסף ליכולת של כל אזרח לפרסם בהינף יד מידע מזיק ברשתות החברתיות או בפלטפורמות שונות. עובדה זו יוצרת צורך חדש אצל אזרחי העתיד. הם יצטרכו לדעת לזהות ולהתמודד עם חדשות כוזבות. לשם כך, חשוב לפתח חשיבה ביקורתית ובפרט יכולת לטעון טענות ולנמק (mathematical reasoning and argumentation).

שיקולים אלה הביאו לחידושים במסגרת המתמטית של פיז"ה, שהחשוב בהם הוא דגש על הנמקה מתמטית ומקומה בכל התהליכים הנלווים לפתרון בעיות.

¹ Organization for Economic Co-operation and Development

2. המסגרת התיאורטית של פיז"ה 2021

מבחני פיז"ה נערכים אחת ל-3 שנים, כשבכל סבב יש תחום אחד מרכזי (קריאה, מתמטיקה, מדעים). המסגרות המתמטיות של פיז"ה נבנו סביב השנים שבהם מתמטיקה הייתה התחום המרכזי של המבחנים (2003, 2012).

2.1 אוריינות מתמטית (Mathematical Literacy)

בבסיס המסגרת המושגית של מבחני פיז"ה (2003, 2012, 2021), עומד המושג של אוריינות מתמטית. לפי המסגרת הזאת, אוריינות מתמטית היא:

"יכולתו של הפרט לחשוב חשיבה מתמטית ולנסח, ליישם ולפרש מתמטיקה כדי לפתור בעיות במגוון הקשרים מהעולם האמיתי. היא כוללת מושגים, פרוצדורות, עובדות וכלים שמטרתם לתאר, להסביר ולחזות תופעות שונות. היא מסייעת לאנשים להבין את תפקידה של המתמטיקה בעולם ולגבש דעות והחלטות מבוססות כמתבקש מאזרחים תורמים, מעורבים וחושבים במאה ה-21".

חשוב לשים לב לכך שההגדרה של אוריינות מתמטית לא רק מתמקדת בשימוש במתמטיקה לפתרון בעיות מחיי היום-יום, אלא גם מעמידה את החשיבה המתמטית והנמקה מתמטית (mathematical reasoning) כליבה של האוריינות המתמטית. תפיסת המתמטיקה העומדת בבסיס האוריינות המתמטית, לפי המסגרת של פיז"ה, היא שהמתמטיקה, (בפרט חשיבה מתמטית, הנמקה מתמטית – דדוקטיבית ואינדוקטיבית, ופתרון בעיות), מהווה כלי קריטי לאנשים צעירים הנתקלים במגוון רחב של אתגרים בהיבטים שונים של חייהם. התרומה של המסגרת המושגית של פיז"ה 2021 היא בהדגשת המקום המרכזי של חשיבה מתמטית בתהליכי פתרון בעיות, בפרט, ובאוריינות מתמטית, בכלל.

ארגון התחום מיוצג באיור 2¹:



איור 1: המסגרת הקונספטואלית של פיזה 2021

² באיור 1 מופיע המונח "חשיבה מתמטית" שאמור להיות תרגום מאנלית של "Mathematical Reasoning". תרגום נאמן יותר הוא "הנמקה מתמטית".

התחום הרחב, שעליו נשענת האוריינות המתמטית ושבמסגרתו היא באה לידי ביטוי, מתחלק לארבעה ממדים: 1. חשיבה ותהליכים מתמטיים של פתרון בעיות ומידול מתמטי (ניסוח, יישום, פירוש וערכה); 2. ידע תוכן מתמטי (כמות, אי-וודאות ועיבוד נתונים, שינוי ויחסים, מרחב וצורה); 3. הקשרים שבהם תלמידים מתמודדים עם אתגרים מתמטיים (אישי, תעסוקתי, חברתי, מדעי); ובפעם הראשונה – 4. הקשר בין אוריינות מתמטית למיומנויות המאה ה-21 (חשיבה ביקורתית, יצירתיות, מיומנויות חקר, הכוונה עצמית, יוזמה והתמדה, שימוש במידע, חשיבה מערכתית, תקשורת, רפלקציה והערכה). מיומנויות המאה ה-21 כוללות מיומנויות חשיבה ברמה גבוהה.

בנוסף, בשל ההתפתחויות הטכנולוגיות, במסגרת המושגית של פיז"ה 2021 יש לראשונה הכרה שתלמידים צריכים להבין ולדעת ליישם עקרונות של חשיבה חישובית (Computational Thinking) בפתרון בעיות מתמטיות (Aydeniz, 2018). חשיבה חישובית מקבילה לאופן שבו אנשי מדעי המחשב חושבים כשהם מנסחים בעיות ומתכננים פתרונות שניתן לבצע באמצעות המחשב. לפי פיז"ה היא כוללת:

Pattern recognition, designing and using abstraction, pattern decomposition, determining which (if any) computing tools could be employed in analyzing or solving a problem, and defining algorithms as part of a detailed solution.

המטרה בהבלטת החשיבות של חשיבה חישובית, ככל שהיא ישימה למתמטיקה, היא להביא את המדינות המשתתפות בפיז"ה לשקול שילוב אלמנטים של חשיבה חישובית בתכניות הלימודים במתמטיקה. זו דוגמה לכך שפיז"ה מכוונת לא רק לבחון מצב קיים אלא גם להשפיע ולהביא לחלחול רעיונות ודגשים בהם המסגרת המושגית מצדדת.

במסמך הזה נתמקד במושגים המרכזיים: אוריינות מתמטית, חשיבה מתמטית ותהליכים של מעגל פתרון הבעיות ומידול מתמטי (ניסוח, יישום, פירוש והערכה), תוך התייחסות לרמות חשיבה גבוהות. ממסמך פיז"ה עולה, כי המערכת המושגית כוללת הרבה מאד פרטים. לכל מושג מתלווה פירוט של פעולות וכישורים מתמטיים הנכללים בו ו/או מאפיינים אותו. הפירוט נועד לסייע למומחים של פיז"ה בתכנון הפריטים למבחני פיז"ה בצורה מאוזנת ומייצגת, ולאפשר למדינות השונות לאמץ באופן מעשי את המרכיבים שיכולים להשתלב בתכניות הלימודים שלהן. התיאורים המפורטים הנחו אותנו בניתוח מסמכי תכנית הלימודים, אבל במסמך הזה נתמקד במושגים העיקריים והמשמעות שיעולה מהתיאורים המפורטים, ובעיקר למטרת העל של אוריינות מתמטית: "להבין את תפקידה של המתמטיקה בעולם ולגבש דעות והחלטות מבוססות כמתבקש מאזרחים תורמים, מעורבים וחושבים במאה ה-21". החלטה זו עולה בקנה אחד עם ביקורת שמושמעת על ריבוי הכישורים ועל דיווחים מפורטים של פיז"ה על כל כישור בנפרד. לדעתה של Kaye Stacey, מומחית אוסטרלית למבחני פיז"ה, דיווח על ריבוי כישורים אינו שימושי (במילים אחרות – מרוב עצים לא רואים את היער), ובנוסף, בפועל הכישורים, בדרך כלל, אינם באים לידי ביטוי בנפרד במהלך פתרון בעיות:

"...reporting against six or more capabilities is impractical because there are just too many and also because they normally occur together in problem solving" (Stacey, 2015, p. 65)

2.2 מידול ומתמטיזציה (Modelling and Mathematization)

מראשית פיז"ה, מתמטיזציה ומידול מהווים אבן יסוד ומרכיב מפתח של אוריינות מתמטית, בשל הקשר שהם יוצרים בין העולם האמיתי לעולם המתמטי³. תיאור תמציתי וציורי של מחזור המידול שבמהותו דומה למושג המידול והמתמטיזציה לפי פיז"ה, ניתן ע"י Syngé (1951):

The use of applied mathematics in its relation to a physical problem involves three steps. First, a dive from the world of reality into the world of mathematics; two, a swim in the world of mathematics; three, a climb from the world of mathematics back into the world of reality, carrying the prediction in our teeth. (Syngé 1951, p. 98)

בשנת 2003 מתמטיקה הייתה התחום המרכזי במבחני פיז"ה בפעם הראשונה. באותה העת, המסגרת התיאורטית של פיז"ה נשענה בעיקר על הגישה ההולנדית הנקראת "מתמטיקה ריאליסטית" (RME – Realistic Mathematics Education). לכן נעשה שימוש במונח מתמטיזציה (Mathematization), שמשמעותו במסגרת פיז"ה מאד דומה למונח מידול (Modelling) המקובל כיום⁴. כפי שנראה בהמשך, האופן שבו מתוארים מתמטיזציה ומידול עבר במסגרת פיז"ה שינויים מסוימים לאורך השנים, אבל משמעותם נשמרה, ותואמת את התפיסה הרווחת בעולם.

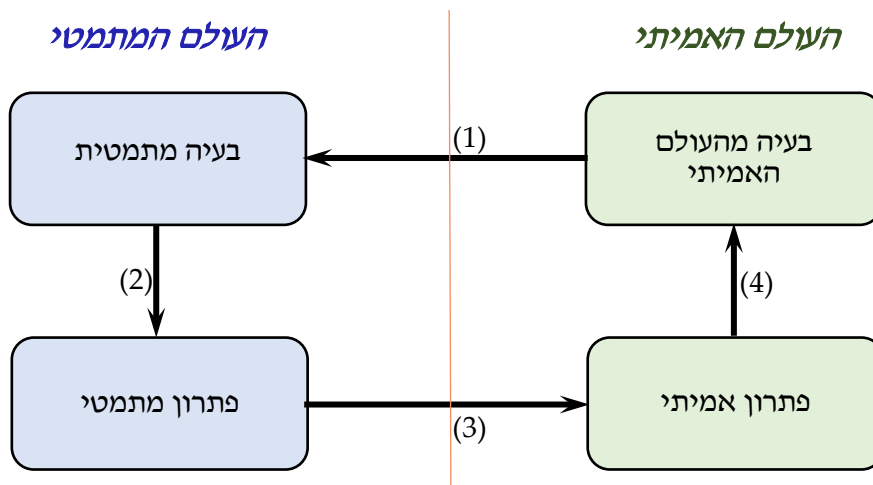
פרוידנטל, אבי הגישה של RME, הבחין בין מתמטיזציה אופקית למתמטיזציה אנכית (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000). מתמטיקה אופקית מאופיינת ע"י מעבר מהעולם האמיתי לעולם המתמטי (מיוצגת באיור שבהמשך באמצעות החץ המסומן ב- (1)). בתהליך המתמטיזציה האופקית, תלמידים מזהים כלים מתמטיים שיכולים לעזור להם לפתור בעיה שמעוגנת בסיטואציה מהעולם האמיתי. לעומתה, מתמטיזציה אנכית מתרחשת בתוך עולם המתמטיקה, וכרוכה בארגון מחדש של ידע בכלים מתמטיים, כמו מציאת קיצורי דרך או גילוי קשרים בין מושגים ואסטרטגיות ויישומם לצורך פתרון הבעיה (מתמטיזציה אנכית מיוצגת באיור שבהמשך בחץ המסומן ב- (2)). פרוידנטל גרס ששני סוגי המתמטיזציה שווים בחשיבותם ודומים במהותם. יצוין כי למרות ההבחנה בין שני סוגי המתמטיזציה, היא אינה חד משמעית. בנוסף, חשוב להיות מודעים לכך שמתמטיזציה יכולה לבוא לידי ביטוי ברמות שונות של הבנה.

לפי גישת ה-RME, במתמטיקה ריאליסטית לא מתכוונים שההקשרים של הבעיות חייבים להיות מעוגנים בעולם האמיתי, אלא בעולם שהתלמיד יכול לדמיין כאמיתי או לפחות כמתקבל על הדעת. מדובר בהתנסויות שנתפסות (או שהשכל הישר מתייחס אליהן) כאמיתיות בשלב מסוים.

איור 2 מתאר את התהליכים הנלווים למתמטיזציה לפי המסגרת של פיז"ה 2003 (מבוסס על Stacey, 2015). בולטת בו ההפרדה בין שני העולמות: העולם האמיתי והעולם המתמטי. המתמטיזציה מאופיינת על ידי מעברים – מהעולם האמיתי לעולם המתמטי ובחזרה לעולם האמיתי. החצים באיור מייצגים תהליכים במחזור של המתמטיזציה (והמידול). החץ המסומן ע"י (1) מייצג את תהליך הניסוח, שבמהלכו מזהים את ההיבטים המתמטיים של הסיטואציה ואת המושגים המתמטיים הרלוונטיים לסיטואציה, ומתרגמים באמצעות הנחות, הכללות ופורמליזציה את הבעיה מהעולם האמיתי לבעיה מתמטית שמייצגת את הסיטואציה. הבעיה המתמטית היא נטולת הקשר מהחיים, ועוסקת במושגים מופשטים – כשהציפייה היא שניתן לפתור אותה בכלים מתמטיים. החץ המסומן ע"י (2) מייצג את תהליך פתרון הבעיה המתמטית. החץ המסומן ע"י (3) מייצג את התהליך שבו מנסים להבין את הפתרון המתמטי במונחים של הסיטואציה במציאות. החץ המסומן ע"י (4) מייצג את התהליך שבו בוחנים באיזו מידה הפתרון עונה על הבעיה המקורית בצורה מספקת.

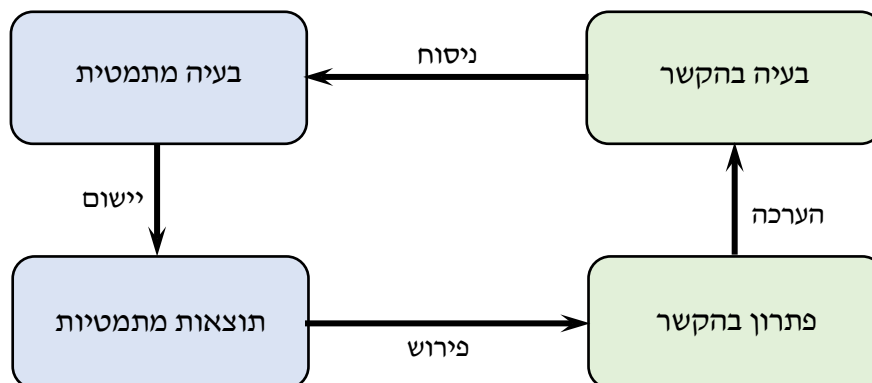
³ אפשר לחשוב גם על מידול גם בתוך עולם המתמטיקה, למשל, במעבר בין ייצוג ויזואלי לייצוג סימבולי, אבל למיטב ידיעתנו במסגרות של פיזה כמעט ואין התייחסות לסוג כזה של מידול.

⁴ כבר בשנות השמונים, בורקהרדט (Burkhardt, 1981) תיאר מעגל של מתמטיזציה (או של מידול) הדומה לאופן שזה שמתואר במסמכי פיזה.



איור 2: מודל של מחזור המתמטיזציה – לפי פיזה 2003

באיור 3 מתואר מודל של מחזור המידול לפי פיז"ה 2012 המתואר במונחים שונים במקצת מאלה שבפיז"ה 2003, למרות הדמיון הרב בין שני המודלים. לפי פיז"ה 2012, שני חצים מייצגים תהליכי מעבר בין העולם האמיתי לעולם המתמטי – ניסוח ופירוש, ואילו שני החצים האחרים מייצגים תהליכים בתוך אותו העולם – יישום מתרחש כולו בעולם המתמטי וכולל את הפעולות המבוצעות לצורך פתרון הבעיה המתמטית, ואילו ההערכה מתרחשת כולה בעולם האמיתי וכוללת בחינת הסבירות של הפתרון. אם הפתרון מספק, המידול מסתיים. אם לא – חוזרים על המחזור (או חלק ממנו) תוך חשיבה מחודשת על הבעיה בהקשר ו/או על יתר השלבים.



איור 3: מודל של מחזור המידול – לפי פיזה 2012

יש לציין שאיור 2 ואיור 3 מתארים מודל אידיאלי מפושט של פתרון בעיות מהעולם האמיתי באמצעות המתמטיקה. בפועל, אפשר לנוע הלך ושוב בתוך מחזור המידול. בנוסף, המעברים בין העולם האמיתי והעולם המתמטי המתוארים במודל אינם נותנים את התמונה המלאה. למשל, לפעמים תוך ניסיון להבין את הפתרון האמיתי עולה שהפתרון לא הגיוני, וצריך לחזור לפתרון המתמטי ולוודא שלא נעשו שגיאות במהלך הביצוע.

בשונה מאוריינות מתמטית, המשמעות של מידול מתמטי במסגרת פיז"ה אינו מוגדר בבירור. אחת הביקורות המושמעות על המסגרת המושגית של פיז"ה היא שמידול מתמטי מופיע בצורה מעגלית. מצד אחד הוא מהווה מושג-על, ומצד שני הוא – מידול, מופיע כאחד הכישורים הנכללים במידול.

מעניין לציין שלמרות שאוריינות מזוהה עם בעיות מהעולם האמיתי, במסמך מפורט יותר של המסגרת של פיז"ה 2021 (OECD, 2018) אפשר למצוא רמז לכך שתהליכים דומים יכולים להתרחש בפתרון בעיות שאינן בהכרח קשורות למצבים מהעולם האמיתי (עמ' 8):

In order for students to be mathematically literate they must be able, first to use their mathematics content knowledge to recognize the mathematical nature of a situation (problem) **especially** those situations encountered in the real world and then to formulate it in mathematical terms. This transformation – from an ambiguous, messy, real-world situation to a well-defined mathematics problem – requires mathematical reasoning. Once the transformation is successfully made, the resulting mathematical problem needs to be solved using the mathematics concepts, algorithms and procedures taught in schools. However, it may require the making of strategic decisions about the selection of those tools and the order of their application – this is also a manifestation of mathematical reasoning. Finally, the PISA definition reminds us of the need for the student to evaluate the mathematical solution by interpreting the results within the original real-world situation.

באותו המסמך (עמ' 30) יש גם פסקה שמתייחסת לאלמנטים פנים-מתמטיים הכלולים בהקשר מדעי, שנחשב חלק מהעולם האמיתי:

Scientific – Problems classified in the scientific category relate to the application of mathematics to the natural world and issues and topics related to science and technology. Particular contexts might include (but are not limited to) such areas as weather or climate, ecology, medicine, space science, genetics, measurement and **the world of mathematics itself. Items that are intra-mathematical, where all the elements involved belong in the world of mathematics, fall within the scientific context.**

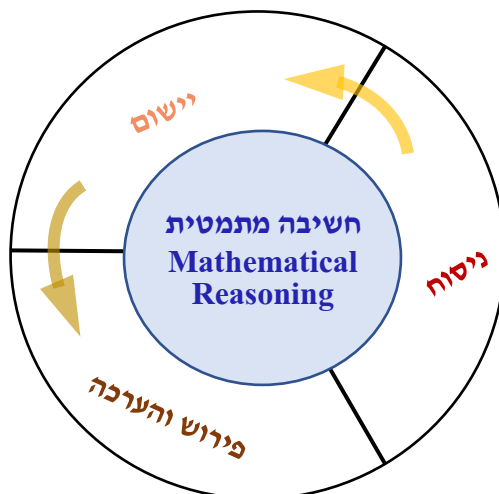
מן האמור לעיל עולה כי אוריינות יכולה לבוא לידי ביטוי גם בתוך העולם המתמטי, אבל מהמסגרת הכללית ומטרותיה משתמע שהחשיבות המרכזית של משימות אורייניות, ובפרט משימות מידול, היא בקישור בין העולם המתמטי לעולם החוץ-מתמטי, במגוון של הקשרים. במסמך הזה נתייחס לעולם האמיתי כעולם החוץ-מתמטי.

חשוב לציין שאוריינות מתמטית איננה דיכוטומיה, כפי שנאמר במפורש בטיטוט המסגרת המתמטית של 2021 (OECD, 2018):

Mathematical literacy is not an attribute that an individual either has or does not have. Rather, mathematical literacy is an attribute that is on a continuum, with some individuals being more mathematically literate than others – and with the potential for growth always present. (p. 7)

בשונה ממחקרי פיז"ה בשנים קודמות, בפיז"ה 2021 המידול המתמטי מאופיין על ידי שלושה תהליכים של מעגל פתרון הבעיות, ולא ארבעה. הפעם אוחדו תהליכי הפירוש וההערכה לתהליך אחד. טבעם של התהליכים נשאר זהה לשנים הקודמות, וגם במסגרת של 2021 מדובר בתהליכים שהם ברוב המקרים תהליכים עוקבים, כשניסוח, על ביטוי השונים, הוא השלב הראשון, יישום הוא השלב השני, ופירוש והערכה – השלב האחרון. אולם נראה שהמחזור מסתיים בפירוש והערכה ולא חוזר חלילה כמו במסגרות הקודמות. חשוב לציין כי כל תהליך יכול לכלול פעולות ברמות שונות, לא בכל בעיה חייבים לעבור את שלושת השלבים, ולא תמיד מתקדמים בצורה חד כיוונית. קורה שחוזרים לשלב מוקדם, כדי לבחון מחדש החלטות והנחות. בתוך כל תהליך יכולות להיות פעולות שהן נגישות לכולם, ופעולות מאתגרות ברמה גבוהה יותר.

באיור 4 אפשר לראות את מקומה המרכזי של החשיבה המתמטית וההנמקה. הוא מתאר את הקשר בין הנמקה מתמטית למחזור המידול. ההנחה היא שהקשר בין העולם המתמטי במידול לפי פיז"ה 2021 הוא זהה לזה שבשנים 2003-2012.



איור 4: הקשר בין חשיבה/הנמקה מתמטית למעגל המידול לפי פיז"ה 2021

3. גישות הוראה ורמות חשיבה במתמטיקה

חשוב לשים לב שהמסגרת של פיז"ה אינה עוסקת בגישות להוראת מתמטיקה, אלא במטרות, תהליכים, תכנים, דגשים ועוד. אין המלצה מפורשת איך להשיג את המטרות, למרות שמהות האוריינות והמידול מכתובה במובנים רבים את העקרונות והמאפיינים הדרושים והראויים של סביבת הלמידה.

מספר הגישות להוראה הוא רב, וההבדלים ביניהן לפעמים דקים מאד. אין גישה שיש הסכמה לגביה שהיא "הטובה מכולן". אפשר למצוא מומחים שמשתמשים במונחים שונים לתיאור גישות דומות, או כאלה שמשתמשים באותו המינוח לתיאור גישות שאינן זהות. הסיבות לכך נעוצות כנראה במורכבות של מלאכת ההוראה, ובכך שאין גישה שהיא מקשה אחת. רוב הגישות נמצאות על רצף, ובדרך כלל לא מדובר בדיכוטומיה. אפילו באנציקלופדיה לחינוך מתמטי (Lerman, 2020), שמומחים בינלאומיים הקדישו מחשבה רבה אילו ערכים לכלול בה, לא מצאו מקום לכלול ערך נפרד לגישות הוראה כלליות במתמטיקה, בעוד שכללו ערכים הקשורים להוראה ולמידה של תחומי תוכן ספציפיים (כמו, למשל, אלגברה, פונקציות, גיאומטריה, הסתברות, ועוד). בכל תחום תוכן מתייחסים לדרכי הוראה ותהליכי למידה המאפיינים את התחום, מנקודת המבט של המחבר/ת. מאידך, אפשר לדבר על עקרונות ומאפיינים של הוראת מתמטיקה התומכים בלמידה.

נעבור לכמה עקרונות וקווים מנחים להוראת המתמטיקה, שיכולים לתמוך בהשגת המטרות של פיז"ה. חלקם נחשבים מאפיינים של הוראה איכותית ויעילה של מתמטיקה באופן כללי (Quality Teaching / Effective Teaching), וחלקם מתאימים במיוחד למידול ופיתוח אוריינות מתמטית. גם המאפיינים אינם דיכוטומיים, וכל אחד נמצא על רצף. יתרה מזאת, הם אינם בהכרח זרים זה לזה. לא בכל שיעור מתאים או ניתן ליישם את כל האלמנטים.

3.1 מי עומד במרכז ההוראה?

שתי גישות מרכזיות להוראה נבדלות לגבי מי עומד במרכז התהליך: המורה או התלמיד. באופן מסורתי, במשך עשורים רבים, המורה היה במרכז, בעוד שכיום יש הסכמה, שיש חשיבות שהתלמיד יהיה במרכז.

גישת הוראה הממוקדת במורה (*Teacher-centered instruction*) בצורתה הקיצונית, נשענת על תפיסה של ההוראה כהעברת ידע (*transmission of knowledge*) מהמורה לתלמיד. לפי גישה זו, המורה הוא הסמכות המתמטית בכיתה ותפקידו להעביר את הידע שלו בעיקר בדרך אקספוזיטורית, כאשר התלמידים די פסיביים בתהליך.

כיום יש הסכמה כמעט גורפת שלמידה משמעותית מתרחשת בסביבה ממוקדת בתלמיד (*Student-centered instruction*) המאפשרת לתלמידים לבנות את הידע מתוך התנסויות שהמורה מזמן להם, תוך אינטראקציה עם עמיתים לכיתה ועם המורה (Yackel & Cobb, 1994; Boaler, 1998; NCTM, 2014). למידה ממוקדת בתלמיד מאופיינת, בין היתר, בתקשורת ושיח מתמטי ובלמידה שיתופית.

במסגרת מחקר של TIMSS נערכה השוואה בין שלוש מדינות: ארה"ב, גרמניה ויפן ביחס לאופן הוראת המתמטיקה בתוך כל מדינה ובין המדינות (Stigler & Hiebert, 1999). אחד הממצאים של המחקר היה שאופן ההצגה וההפעלה של משימה בכיתה משפיע על סוג השיח המתמטי המתפתח, סוגי ההבנות וההזדמנויות הנפתחות בפני התלמידים.

באותה העת נמצא כי בארה"ב המורים נוטים להדגים לתלמידים תרגילים לפתרון ורק אח"כ נותנים להם לתרגל שאלות דומות לשאלה שהודגמה במליאת הכיתה. אם תופיע שאלה בתרגול ששונה במעט מהדוגמה שניתנה בכיתה, לרוב, המורה יסב את תשומת ליבם של התלמידים עוד לפני שנתקלו בקושי וניסו להתמודד איתו. גישה זו מאפיינת הוראה ממוקדת מורה. בגרמניה נמצא מצב ביניים לפיו המורה מנסה בעזרת התלמידים לפתור את הבעיה החדשה. כך התלמידים שותפים לתהליך פענוח השאלה ופתרונה. לעומתם ביפן, כל תלמיד ינסה תחילה לפתור את הבעיה לבד, עוד לפני שהמורה הסביר כיצד לגשת לשאלה ובתום ההתנסות המורה יציג על הלוח את כל דרכי הפתרון שעלו בכיתה. כך יוצגו על הלוח מגוון דרכי פתרון והלוח ישקף תהליך רפלקטיבי של הלמידה. הגישה ביפן שמה את התלמיד במרכז. ברור שבכל אחד מהמצבים נפתחות הזדמנויות שונות לחלוטין של למידה ובהתאם דרישות קוגניטיביות שונות מהתלמידים⁵.

מן האמור לעיל עולה כי על מנת לפתח אוריינות מתמטית, חשוב שסביבת הלמידה תהיה ממוקדת תלמיד. נעסוק בהמשך בגישות המעמידות את התלמיד במרכז.

3.2 מהי הוראה יעילה במתמטיקה?

מחקרים בתחום מדעי הקוגניציה (Mayer, 2002; Bransfeld, Brown, & Cocking, 2000) כמו גם מחקרים בתחום החינוך המתמטי (Lester, 2007), מצביעים על כך שלמידת מתמטיקה מתרחשת כחלק מתהליך אקטיבי, שבו כל תלמיד בונה את הידע המתמטי שלו מתוך התנסויות אישיות, משולבות במשוב מאחרים (לדוגמה, עמיתים ומורים), בנוסף למשוב עצמי. מחקרים אלה זיהו מספר עקרונות למידה המהווים תשתית להוראה יעילה של מתמטיקה. עקרונות אלה מדגישים את החשיבות בהתמודדות עם משימות מתמטיות מאתגרות; קישור בין ידע קיים לידע חדש; בנייה של הבנה קונספטואלית בד בבד עם ידע פרוצדורלי; בניית ידע באופן חברתי באמצעות שיח מתמטי, פעילויות, ואינטראקציה סביב בעיות משמעותיות; קבלת משוב בזמן סביר; ופיתוח מודעות מטה-קוגניטיבית.

במסמך של NCTM (2014), המחברים מונים שמונה מרכיבים מבוססי מחקר של מלאכת הוראת המתמטיקה המושתתים על העקרונות שנמנו לעיל. מרכיבים אלה נחשבים חיוניים כדי שההוראה תהיה יעילה. בהוראה יעילה הכוונה הוראה שיש לה הפוטנציאל:

⁵ בעקבות הממצאים מהמחקר הזה, מדינות התחילו לשקול מחדש את דרכי ההוראה הנהוגות אצלן.

... to open up greater opportunities for higher-order thinking and for raising the intellectual quality of student cognition. (p. 65)

לפי NCTM (2014), הוראה יעילה במתמטיקה:

- (1) מציבה מטרות מתמטיות שממקדות את הלמידה
- (2) משלבת משימות מתמטיות המקדמות חשיבה מתמטית ויכולת פתרון בעיות
- (3) מקשרת בין ייצוגים מתמטיים כאמצעי להעמקת ההבנה
- (4) יוצרת שיח מתמטי משמעותי
- (5) מעלה שאלות שתכליתן להעריך ולקדם את החשיבה המתמטית של התלמידים
- (6) בונה שליטה של התלמידים בפרוצדורות על בסיס הבנה קונספטואלית
- (7) מזמנת אתגרים מתמטיים ותומכת בהתחבטויות ובהתמודדות פרודוקטיבית איתם
- (8) מאתרת ראיות לגבי החשיבה של התלמידים ומשתמשת בהן לצורך הערכת ההתקדמות והתאמת ההוראה

אין ברשימה שלעיל קביעה שחייבים תמיד להתקיים כל שמונה המרכיבים. עם זאת, מן האמור לעיל משתמע, שהוראה יעילה הינה ממוקדת תלמיד ומייחסת למשימות מתמטיות חשיבות רבה. גם המסגרת הקונספטואלית של פיז"ה שמה דגש על משימות (אורייניות). נרחיב את הדיון על מקומן של משימות בהוראת מתמטיקה בהמשך.

3.3 איך קושרים בין העולם המתמטי לעולם החוץ-מתמטי?

באופן כללי, יש שלוש גישות שונות להוראת מתמטיקה בהקשר של שני העולמות – האמיתי והמתמטי. שתי הגישות הראשונות מקשרות בין העולם האמיתי לעולם המתמטי ואילו השלישית מתמקדת (כמעט) לגמרי בעולם המתמטי.

הגישה הראשונה נשענת על RME (Realistic Mathematics Education). מטרת העל של גישת RME היא הוראת מתמטיקה באופן שמדגיש את חשיבותה ואת הצורך בה, תוך אמונה שמטרה זו מושגת באופן הטוב ביותר כאשר יוצאים מהעולם האמיתי, ומצמיחים ממנו כלים ועקרונות מתמטיים תוך כדי תהליך של פתרון בעיות. חומרי הלמידה המעוצבים באסכולת RME מתוכננים לספק לתלמידים התנסויות בהן מודלים של המציאות הופכים אצל התלמידים, בהדרגה, במהלך ההתנסויות, למודלים שבעזרתם מתרחשת חשיבה מתמטית יותר פורמלית. במצבים בהם ההתפתחות אכן צומחת לידי בנייה של מציאות מתמטית חדשה, Gravemeijer (1999) מדבר על מעבר מ"מודל של..." ("model of..."), אשר מתאים לסיטואציה מציאותית, ל"מודל לחשיבה מתמטית" ("model for mathematical reasoning") שקשור למציאות מתמטית מעבר לסיטואציה שבה נבנה המודל המתאר את המציאות. מנקודת מבט, הידע הלא פורמלי, הקשור בסיטואציה, הוא הבסיס עליו נבנה הידע המתמטי המופשט.

לפי Drijvers-IVan den Heuvel-Panhuizen (2020), הוראה בגישת RME מבוססת על ששה עקרונות:

- (1) עיקרון הפעילות: התלמידים הם משתתפים פעילים בתהליך הלמידה. פרוידנטל מדבר על כך שהתלמיד צריך "להמציא מחדש" (reinvent) את הידע.
- (2) עיקרון המציאות: הוראת המתמטיקה צריכה להתחיל מבעיות המעוגנות בסיטואציות מציאותיות ולהצמיח מהן כלים מתמטיים, והתלמידים צריכים להיות מסוגלים ליישם כלים מתמטיים כדי לפתור מגוון בעיות מחיי היום-יום.
- (3) עיקרון הרמה: למידת מתמטיקה כרוכה ברכישת רמות הבנה החל מהקשרים לא פורמליים עד לרכישת תובנות (insights) אודות הדרך בה המושגים והאסטרטגיות מקושרים.
- (4) עיקרון השילוב: תחומי מתמטיקה שונים (כמו התחום המספרי, גאומטריה, מדידות וכיו"ב) אינם נלמדים בנפרד אלא התחומים השונים משולבים בתוך בעיות עשירות.

5) עיקרון האינטראקטיביות: למידת מתמטיקה צריכה להתרחש כפעילות חברתית, תוך אינטראקציה ושיתוף בין התלמידים.

6) עיקרון ההדרגה: המורים צריכים לקחת אחריות על תהליך הלמידה, והלמידה צריכה להתבסס על מסלולים קוהרנטיים ארוכים.

עקרונות אלה מצביעים על מקומם המרכזי של התלמידים בתהליך הלמידה. מאחר ויש חשש שהמתמטיקה עלולה להפסיק להיות שימושית לתלמידים כשהקשר משתנה, ואולי לא יידעו איך להשתמש בה במצבים חדשים, גישת RME יוצרת במכוון הזדמנויות להתפתחות הדרגתית של רמות הבנה. בהתחלה ההבנה קרובה להקשר בו למדו, ובהדרגה עוברים להקשרים נוספים ומגיעים להכללות. כך, בשלב הראשון התלמיד יוצר את המודל עבור משהו מציאותי, ובהדרגה המודל משמש לחשיבה מתמטית בעוד ועוד הקשרים. אפשר לראות שחלק מהעקרונות הללו ניתנים לשילוב גם אם לא מאמצים את עיקרון המציאות.

הגישה השנייה יוצאת מהעולם המתמטי, ואז מיישמת עקרונות וכלים מתמטיים לבעיות המעוגנות בסיטואציות מהעולם האמיתי. גישה זו רווחת בבית הספר העל-יסודי במדינות רבות, ובפרט בארץ. מאז ומתמיד שולבו בעיות מילוליות בתכניות הלימודים במתמטיקה. אותן הבעיות נועדו ליישם מודל מתמטי לבעיה מהמציאות. כך, למשל, "בעיות הדרך" הידועות (רכב יצא מנקודה מסוימת בשעה מסוימת ובעבור זמן יצא רכב אחר מולו – מתי ייפגשו?). אחד החסרונות של גישה זו היא שהאופן שבה מלמדים, בדרך כלל מסגיר בפני התלמידים איזה מודל עליהם ליישם, ובכך מפחית את האתגר ואת רמות ההבנה שאפשר להשיג במצבים פתוחים יותר, בהם על התלמידים לעמול כדי לאתר מודל שמתאים לבעיה. חסרון נוסף הוא שחלק מהבעיות המילוליות נתפסות כמלאכותיות ומאולצות, וכתוצאה מכך אינן תורמות להבנת תפקיד המתמטיקה בעולם סביבנו. כיום, יש עלייה במודעות לחשיבות של פיתוח אוריינות מתמטית ואיתה גם גובר השימוש בבעיות יותר אותנטיות מהעולם האמיתי. יצוין כי גם אם גישה זו רווחת, אין זה אומר שאין הזדמנויות לתלמידים לצאת מהעולם האמיתי ודרכו לבנות כלים מהעולם המתמטי. יש מורים שעושים זאת, למשל, כדי להנגיש את המתמטיקה לתלמידים ולתת משמעות רלוונטית למושגים מתמטיים, במיוחד (אבל לא רק) בפתיחה של נושא חדש. אחד היתרונות של משימות פתיחה אורייניות הוא שבשלב הפתיחה של נושא יש לתלמידים הזדמנות לפתח בעצמם כלים להתמודד עם בעיות, ולא רק להתבסס על דוגמאות שהוצגו להם קודם לכן, מה שמעלה את רמות החשיבה, וגם את המודעות ליכולת שלהם לפתור בעיות באמצעות המתמטיקה ובאמצעות חיפוש פתוח של דרכי פתרון.

כל אחת משתי הגישות הללו קושרת בין העולם האמיתי לעולם המתמטי ויכולה להביא לפיתוח אוריינות מתמטית ולמימוש החזון של פיז"ה, כלומר, הבנת תפקיד המתמטיקה בעולם האמיתי והיכולת להשתמש במתמטיקה בצורה מושכלת בחיי היום-יום. המסגרת של פיז"ה אינה עוסקת בשאלה באיזו מהגישות מומלץ לנקוט, וכפי שראינו – מידול אינו אומר שאת הכלים המתמטיים צריך להצמיח מתוך העולם האמיתי. כדאי לציין שעל מנת ליישם את גישת RME (כפי שנעשה בהולנד, בדנמרק ובעוד מדינות) הושקעו משאבים רבים כדי לבנות תכנית לימודים מפורטת וחומרי לימוד ייחודיים שמאפשרים את ההצמחה של המתמטיקה בצורה עקבית לאורך זמן מתוך סיטואציות מציאותיות. נציין שכדי ליישם תכנית כזאת חשוב להקדיש זמן ומשאבים להכשיר מורים ללמד ברוח זו וללוות אותם מקצועית (Webb, 2020; Van den Heuvel-Panhuizen, 2000). מאחר ובארץ תכנית הלימודים ומרבית חומרי הלימוד הרווחים לא נבנו בגישת RME, מתאים יותר לאמץ את הגישה השנייה, ובמידת האפשר להצמיח מידי פעם את המתמטיקה ברוח RME. כדי שלגישה השנייה תהיה השפעה בכיוון של מימוש המטרות של פיז"ה חשוב שהיא תיכלל בשגרת ההוראה, ושתהיה מסה קריטית של התנסויות עם משימות אורייניות.

הגישה השלישית גורסת שלימוד המתמטיקה צריך להתרחש כולו בעולם המתמטי, כמתמטיקה טהורה, ללא כל קשר לעולם האמיתי, בתקווה שכאשר תלמידים יזדקקו למתמטיקה בחיי היום-יום שלהם הם יידעו איך ליישם אותה. פרוידנטל התנגד לגישה זו מכיוון שלדעתו רוב התלמידים לעולם לא יחוו צורך להשתמש במתמטיקה שלמדו בבית הספר. נימוק אחר להתנגדות לגישה זו, שהתחזק בעקבות התוצאות של מבחני פיז"ה, היא שהיכולת לזהות מתי נדרש ליישם את הכלים המתמטיים שנרכשו וכיצד לעשות זאת, אינה מתפתחת מעצמה, אפילו לא אצל תלמידים חזקים במתמטיקה. לכן, גם אם מלמדים מתמטיקה בגישה השלישית, חשוב לשלב בלימוד המתמטיקה בעיות מעניינות ומאתגרות מחיי היום-יום, שממחישות כיצד המתמטיקה יכולה לשמש

לפתרון, על מנת לחשוף את התלמידים לשימושים של המתמטיקה בעולם האמיתי ולהדגים את הרלוונטיות של המתמטיקה למציאות. עם זאת, הגישה השלישית עשויה לתרום לפיתוח חשיבה מתמטית ויכולת פתרון בעיות מתמטיות – כישורים חיוניים לפי המסגרת של פיז"ה.

ישנם סיווגים נוספים של דרכים לשילוב בין העולם המתמטי לעולם האמיתי. בלום וניס (Blum & Niss, 1991) מבחינים בין ארבע דרכים לשלב יישומים ומידול בהוראת המתמטיקה⁶. לדבריהם, השאלה איזו דרך (או שילוב בין דרכים) מועדפת תלויה בשיקולים רבים ומורכבים. קייזר (Kaiser, 2018) מדברת על שתי גישות כלליות: גישה הוליסטית (Holistic) וגישה אטומיסטית (Atomistic). הגישה ההוליסטית מניחה שההתפתחות של יכולות מידול, צריכה להתרחש בתהליכים שלמים של מידול, הכוללים את המורכבות ודרגות הקושי של הבעיות. לעומתה, הגישה האטומיסטית גורסת שהגישה ההוליסטית גוזלת יותר זמן ואינה יעילה די הצורך, במיוחד בתחילת הדרך, ולכן מתמקדת בכישורי-משנה של מידול (sub-competencies of mathematical modeling). שתי הגישות הללו נבדלות באופן השילוב של משימות מידול בבית הספר. לכל אחת מהגישות יתרונות וחסרונות, ואין המלצה ברורה על אחת מהן.

הדרך הרווחת בארץ קרובה לדרך הראשונה של בלום וניס, בה יש הפרדה בין ההתחלה, שבה שמים דגש על המתמטיקה "טהורה", להמשך שבו מתמקדים על יישומים הנשענים על המתמטיקה שנרכשה בהתחלה.

3.4 מה הקשר בין למידת חקר לאוריינות מתמטית?

קיים קשר הדוק בין למידה מבוססת חקר לבין אוריינות מתמטית במלוא מובנה, לרבות פתרון בעיות מידול. למידה מבוססת חקר (IBL: Inquiry-Based Learning) מעצם טבעה ממוקדת בתלמיד. היא כוללת למידה מבוססת פתרון בעיות (PBL: Problem-Based Learning), למידה מבוססת מידול (Mathematical Modeling), ולמידה מבוססת פרויקטים (Project-Based Learning). תכניות לימודים מבוססות חקר שמות דגש על שילוב יישומים מהעולם האמיתי ומידול כחלק משמעותי מהתכנית (Kaiser, 2018). בנוסף, התלמידים אמורים ללמוד מתוך ההתנסויות שלהם על דרכי מחקר הנהוגים במתמטיקה ובמדע, ולהתקדם בכיוון של לומד עצמאי (Maass & Artigue, 2013). אחת המטרות של למידה מבוססת חקר היא פיתוח חשיבה מתמטית ברמה גבוהה.

חשוב לציין שההגדרה של למידה מבוססת חקר איננה אחידה (Maass, 2018). ההגדרות נבדלות ברמת האוטונומיה הניתנת לתלמידים בתהליך החקר. יש הגורסים כי חלק אינטגרלי של למידת חקר היא למידה חברתית המבוססת על אינטראקציות ושיתוף פעולה בין התלמידים בקבוצות קטנות. תפקיד המורה לתמוך בתלמידים בצורה פעילה אך לא ישירה, לשמש כמנחה אבל לא לכוון את התלמידים על כל צעד ושעל מה עליהם לעשות. בדומה לעקרונות אחרים, יש הרואים גם למידת חקר על רצף. Bell ו-Banchi (2008) מתארים 4 רמות חקר (במדע), החל מחקר שבא לאשר עיקרון, כשהתוצאה ידועה מראש, עד לחקר פתוח שבו התלמידים חוקרים שאלות שהם מעלים ומנסחים באמצעות פרוצדורות שהם מתכננים ובוחרים מיוזמתם. Zollman ו-Murawska (2015), הראו איך רמות החקר האלה יכולות להיות מיושמות גם במתמטיקה.

כאמור, אלמנט החקר מאפיין גם סביבות למידה מבוססות פרויקטים (Project-Based Learning), בהן התלמידים נחשפים לשאלות ובעיות מורכבות ומאתגרות לאורך זמן ממושך, כאשר המורה יוצר לתלמידים הזדמנויות לחוות למידה אותנטית (Barron & Darling-Hammond, 2015). הזדמנויות אלה מאפשרות לתלמידים לעבוד בשיתוף פעולה פרודוקטיבי ולפתח מיומנויות תקשורת, במגמה שיפתחו חשיבה ביקורתית ויכולות לפתרון בעיות הדרושות לניווט בסיטואציות מחיי היום-יום. למידה מבוססת פרויקטים יכולה להתרחש בתחומים אינטרדיסציפלינריים, כך שהתלמידים עובדים לאורך זמן על פרויקט שמקשר בין תחומים רבים, מעלים שאלות מחקר ומנסים להשיב עליה. ללמידה מבוססת פרויקטים מעלות חינוכיות רבות, כמו העלאת המוטיבציה והעניין אצל התלמידים, אולם מנגד יש גם חשש שללא תכנון קפדני של המורה, התלמידים עלולים להחמיץ הזדמנויות לקשר בין העבודה על הפרויקט למושגי מפתח (מתמטיים) עליהם נשען הפרויקט (Barron & Darling-Hammond, 2015).

⁶ (i) The separation and two-compartment approach; (ii) The islands approach; (iii) The mixing approach; and (iv) The integrated approach

(Hammond, 2015). לכן, בהקשר של פיתוח אוריינות מתמטית ברמה גבוהה, למידה מבוססת פרויקטים לא תמיד יעילה.

למידה מבוססת בעיות (PBL⁷) קרובה במהותה ללמידה מבוססת פרויקטים, ולעיתים מתייחסים אליה כסוג ספציפי של למידה מבוססת פרויקטים. ההבדל העיקרי ביניהן הוא היקף הבעיה הנחקרת. גם בסביבת למידה מבוססת בעיות התלמידים עובדים בדרך כלל בקבוצות קטנות, חוקרים בעיות משמעותיות, מזהים מה צריך ללמוד כדי לפתור את הבעיה ובונים אסטרטגיות לפתרון. הבעיות הן לרוב מציאותיות, לעיתים מעורפלות במקצת (כמו שקורה במציאות), עם ריבוי פתרונות וגישות לפתרון. בנוסף, חשוב שהבעיות יתאימו לניסיון התלמידים, יקדמו ארגומנטציה, יעודדו הזדמנויות למתן משוב וקבלת משוב, ויאפשרו חשיפה חוזרת למושגים כדי להעמיק את ההבנה. יש עדויות לכך שתלמידים שלומדים בסביבת למידה מבוססת בעיות, מצליחים להעלות השערות מדויקות, להציע הסברים קוהרנטיים, ולהצדיק טיעונים בנימוקים תקפים. אפשר לראות בעיסוק בבעיות מידול מקרה פרטי של למידה מבוססת בעיות.

גישות חקר מציבות אתגרים מורכבים למורה. בשונה ממה שנהוג לחשוב, יישום מושכל של גישות חקר במתמטיקה תלוי בצורה קריטית בידע ובמיומנויות של המורה. מורים נוטים לטעות ולחשוב שלמידה ממוקדת בתלמיד לא חייבת להיות מובנית, בעוד שגישות אלה מחייבות תמיכה נרחבת של המורה בתלמידים והערכה והתאמה בלתי פוסקות במהלך למידת החקר.

3.5 מה מקומן וטבען של משימות מתמטיות בתהליך ההוראה?

נקודת המוצא שלנו היא שלמשימות הלימוד יש השפעה מכרעת על אופיין וטיבן של ההזדמנויות ללמידה (Stein, Grover, & Henningsen, 1996; Stein & Lane, 1996). הן משקפות ומעצבות את דרכי הוראת המתמטיקה, כפי שסילבר (Silver, 2016) גורס:

Problems are central to mathematics teaching and learning and constitute the basis for intellectual activity in the classroom (Lampert, 2001; Stein, Smith, Henningsen, & Silver, 2000). Thus, mathematics problems form the foundation of students' opportunities to learn mathematics. (p. 345)

לכן, נראה לנו חשוב להדגים ולהמחיש את המורכבות שבבחירה ובנייה של משימות אורייניות, ובפרט – משימות אורייניות המחייבות ו/או מפתחות רמת חשיבה גבוהה (NCTM, 2014). משימות שהן לכאורה אורייניות, יכולות להיות שונות בתכלית – החל מאוריינות במלוא מובנה וכלה בקשר רופף ושטחי למציאות ושאלות נלוות שאינן הגיוניות. נראה לנו שניתוח כזה יכול להתוות דרך ליישום מושכל של המשימה בכיתה. משימות אורייניות שנבנות בקפידה יכולות להעצים את הידע המתמטי, אבל לשם כך – צריך כאמור לעבוד עם המורים.

חוקרים מסווגים משימות לימוד במתמטיקה לפי קריטריונים שונים. יש המתמקדים בסוג ההקשר והקשר לעולם האמיתי, יש המתייחסים לרמות החשיבה או הדרישה הקוגניטיבית שהמשימה מזמנת. נביא כמה גישות לסיווג משימות, ונראה איך מערכת הקטגוריות שבנינו לצורך ניתוח הפוטנציאל של משימה לפיתוח אוריינות ברמה גבוהה קשורה לגישות אלה.

נעבור לתיאור כמה מסגרות תיאורטיות העוסקות במשימות מתמטיות.

3.5.1 אפיון משימות לפי הקשר שלהן למציאות

עיקרון השילוב של RME מדגיש את החשיבות בעיסוק בבעיות מתמטיות עשירות (Rich Tasks). לפי Wijers ו- de Haan (2020), **משימות עשירות**:

- אפשר לפתור ביותר מדרך אחת

⁷ PBL often stands for Project-Based Learning, instead of Problem-Based Learning

- מבוססות על ידע שכבר קיים אצל התלמיד אך מאפשרות לתלמיד להרחיב ולהעמיק את הידע הקיים
- מדגישות הנמקה (reasoning) יותר מאשר חיפוש אחר תשובה נכונה.

המחברים מצביעים על כך שדרישות אלה נכונות לא רק ביחס לפעילויות הקשורות לעולם האמיתי, אלא גם כשמדובר בפעילויות שההקשר שלהן הוא פנים-מתמטי. למשל, לדבריהם בעיות שעוסקות בתנועה של נקודות בתוך סריג (grid) נחשבות אף הן לבעיות בהקשר.

Vos (2020) מציגה, ברוח גישת RME, קטגוריזציה של משימות, בהתאם להקשר ולקשר שלהן לעולם:

(1) משימות ללא הקשר:

"משימות חשופות" (bare tasks): משימות ללא הקשר, שמוצגות באמצעות סמלים מתמטיים מבלי שמייחסים להם משמעות. למשל, $3\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$.

(2) משימות עם הקשר:

- משימות שבהן ההקשר לא מדגיש את ההיבט השימושי:
"משימות מולבשות" (dressed-up tasks): משימות שיש להן הקשר, אבל המשמעות והשימושיות חבויות (או אינן קיימות). למשל: "כמה רבעי שעה יש בשלוש וחצי שעות?" או "כמה רבעי פיצה יש בשלוש וחצי פיצות". כאן היחידות והחילוק מקבלים משמעות אבל מהשאלה לא ברור לשם מה לחלק את הפיצות או לשם מה חשוב לדעת כמה רבעי שעה יש בשלוש וחצי שעות.
- משימות שבהן ההקשר מדגיש את ההיבט השימושי:
- משימות ריאליסטיות מהקשרים שתלמידים התנסו בהם. למשל: "במרכז רפואי ניתן לקבל ייעוץ בין השעות 8:30 ל-12:30. אורך פגישת ייעוץ רבע שעה. כמה חולים ניתן לקבל לפגישות של רבע שעה?". כאן נוסף ההיבט של השימושיות של המידע (usefulness) ובנוסף לכך המשימה היא ריאליסטית כי תלמידים בדרך כלל מכירים את הסיטואציה של תור לרופא.
- משימות בהקשר שאפשר לדמיין ושנתפסות כאמיתיות. למשל: "חוקרים מפליגים בים כדי לצפות בלווייתנים, ונותר להם דלק לעוד שלוש וחצי שעות. כמה פעמים יצליחו לראות לווייתן בזמן שנותר להם, אם הוא עולה לנשום כל רבע שעה?"
- משימות בהקשר מתמטי, למשל, תרגיל חילוק השברים שהבאנו קודם יכול לבוא בהקשר גאומטרי מלווה בדיאגרמה שמראה את משמעות החילוק. ניתן ללוות אותו באיורים דמויי חפיסת שוקולד אפילו בלי להזכיר שמדובר בשוקולד.

Vos מציינת שאם הסיטואציה אינה אמינה, הלומדים שפותרים את הבעיה מתייחסים אליה במשמעות של בעיה חשופה ו/או מולבשת, ולא כאל בעיה בהקשר.

כפי שצוין, השימוש בהקשרים מחיי היום-יום איננו מבטיח שמשימה תהיה אוריינית. פירס וסטייסי (Pierce & Stacey, 2006) מצאו שמורים מייחסים לשימוש בבעיות מחיי היום-יום השפעה על המוטיבציה של התלמידים, ללא קשר לתהליכים הקוגניטיביים שהבעיות מזמנות ולחשיבה המתמטית שהן מקדמות, ולעיתים קרובות משתמשים בקונטקסט כמשהו חיצוני ושטחי בלבד.

Students, in the arguments in the literature, as summarized for example by Blum and Niss (1989), are seen as being motivated to learn mathematics because of the power it gives them, probably in the future. This power is to be able to use mathematics to solve problems of intellectual interest or affecting their everyday lives or relating to their interests. In contrast, for our teachers, the improved motivation that comes from using real world problems comes from a very direct, here-and-now association with pleasurable things. It is not a power to solve problems of interest, but an association with pleasant things. The explanation of teacher's

using simple sensory pleasures and associations to cast a halo over mathematics to improve its image ties together many of our observations. (p. 223)

Real world contexts provide an opportunity for mathematics to benefit from the halo of positive associations. Teachers can use the halo effect as an important part of their pedagogical tool-kit. It is only dangerous if it leads to passing over opportunities to teach substantive mathematics in favor of providing simple sensory pleasures. (p. 224)

זאת אחת הסיבות שלא הסתפקנו באיתור משימות הקשורות למציאות. חיפשנו כלי לאפיין את הפוטנציאל שלהן לקדם את מטרות העל של אוריינות מתמטית לפי פיז"ה וכן לפתח חשיבה ברמה גבוהה. כשעוסקים ברמות חשיבה במתמטיקה, במרבית המקרים מדברים על רמות החשיבה שהמשימה מזמנת, ומייחסים למי שמבצע אותה במלואה כמי שמפגין את אותה רמת החשיבה. הניסיון לאפיין רמות חשיבה באופן חד משמעי הוא בעייתי, לכן מונים בדרך כלל מאפיינים שמצביעים על דרישה קוגניטיבית גבוהה.

3.5.2 אפיון משימות לפי רמת הדרישה הקוגניטיבית שלהן

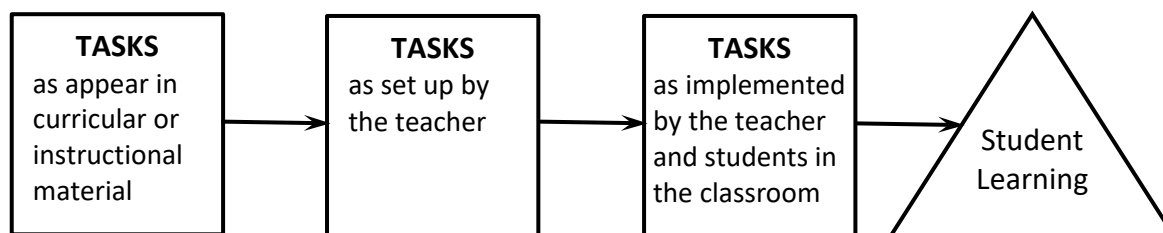
בין המחקרים המצוטטים ביותר בהקשר של דרישה קוגניטיבית של משימות מתמטיות המיושמות בכיתה נמצאים המחקרים של Smith ו-Stein (1996, 1998, 2000). המחקרות מבחינות בין משימות עם דרישה קוגניטיבית נמוכה לכאלה עם דרישה קוגניטיבית גבוהה. משימות מתמטיות נחשבות ברמות חשיבה גבוהות אם הן מאפשרות לתלמידים להיות פעילים בתהליכי חקר ולהשתמש בפרוצדורות מתמטיות שמקושרות בצורה משמעותית למושגים ולתובנות מתמטיות (NCTM, 2014).

כשבאים לקבוע את הרמה של משימה, חשוב לקחת בחשבון ידע וניסיון קודמים של התלמידים שאמורים להתמודד עם המשימה. משימות יכולות להתחיל כמשימות ברמה גבוהה עבור התלמידים, כשהם נמצאים בשלבים הראשונים של למידה של מושגים, רעיונות ועקרונות מתמטיים שבבסיס הבעיה (למשל, מערכת משוואות ממעלה ראשונה, התנהגות של פונקציה, צירופים של מספרים). אולם כשהתלמידים מגבשים את ההבנה שלהם בנושאים המתמטיים הקשורים לבעיה, אותן המשימות עשויות להפוך להתנסויות שגרתיות עבורם. בשלב הזה, תלמידים זקוקים למשימות שירחיבו ביתר שאת את הרעיונות המתמטיים הללו ויביאו להעמקת ההבנה וחיזוק החשיבה המתמטית שלהם ויכולתם לפתור בעיות.

טבלה 1 שלהלן, מבוססת על עבודתן של סמית וסטיין (1998). יש בה תיאור של המאפיינים העיקריים של משימות מתמטיות ברמות הקוגניטיביות השונות. יש דמיון רב בין רמות החשיבה הגבוהות (5 ו-6) של פיז"ה לבין המאפיינים של משימות עם דרישה קוגניטיבית גבוהה, לפי סמית וסטיין, במיוחד של המשימות הדורשות עשייה מתמטית.

טבלה 1: קריטריונים להערכת רמת הדרישה הקוגניטיבית של משימות מתמטיות לפי: Smith & Stein, 1998	
משימות בעלות דרישה קוגניטיבית גבוהה	משימות בעלות דרישה קוגניטיבית נמוכה
משימות הדורשות שימוש בפרוצדורות עם הבנה - ממקדות את תשומת הלב לשימוש בפרוצדורות במטרה לפתח הבנה מעמיקה יותר של מושגים ורעיונות מתמטיים. - מפנות במישור או בעקיפין לפרוצדורות כלליות, שיש להן קשר הדוק לרעיונות המתמטיים הרלוונטיים. - מזמנות שימוש בריבוי ייצוגים וקישור בין ייצוגים שונים – פעילות שמסייעת לפיתוח הבנה מתמטית. - דורשות מאמץ קוגניטיבי מסוים, שמתבטא בצורך לעסוק ברעיונות קונספטואליים שבבסיס הפעולות המבוצעות.	משימות שינון - נשענות על שחזור של עובדות וכללים שנלמדו בעבר. - לא ניתן לפתור אותן על ידי ביצוע פרוצדורות או משום שלא קיימת פרוצדורה לפתרון או משום שהזמן המוקצב לעבוד על המשימה קצר מדי לביצוע פרוצדורה. - הן חד משמעיות: נשענות על שחזור מדויק של חומר ידוע מראש ויש הנחיות ברורות מה צריך לשחזר. - אינן מכילות קשרים למושגים העומדים בבסיס של החומר המשוחזר ו/או הנלמד.
משימות הדורשות עשייה מתמטית - דורשות חשיבה מורכבת ולא-אלגוריתמית - דורשות לחקור ולהבין את טבעם של מושגים, תהליכים וקשרים מתמטיים. - דורשות בקרה עצמית על תהליכי החשיבה. - דורשות שימוש מושכל בידע רלוונטי ובהתנסויות קודמות - דורשות ניתוח של המשימה ובחינת אילוצים שעשויים להגביל דרכי פתרון מסוימות. - דורשות מאמץ קוגניטיבי ניכר ועשויות לעורר רמה מסוימת של דאגה בהעדר האפשרות לצפות מראש תהליכי פתרון מתאימים.	משימות הדורשות שימוש בפרוצדורות ללא הבנה - הן אלגוריתמיות: יש הנחיה מפורשת או שברור מאליו איזו פרוצדורה יש לבצע. - דורשות רמת חשיבה מוגבלת לפתרון המשימה. כמעט ואין ספק לגבי מה צריך לעשות כדי לפתור את המשימה ואיך לעשות זאת. - לא כוללות קשרים למושגים או למשמעויות העומדים בבסיס הפרוצדורות שמבצעים לצורך פתרון המשימה - מתמקדות בהגעה לתשובה נכונה ולא על פיתוח הבנה מתמטית. - אינן דורשות הסברים, למעט תיאור של הפרוצדורה שבוצעה.

אחד ההבדלים בין המסגרת של פיז"ה למסגרת של סטיין וסמית הוא שהדרישה הקוגניטיבית מיוחסת למשימה בעוד שרמות הבקיאיות של פיז"ה מתייחסות לתלמיד. סטיין וסמית (1998) עקבו אחר גלגולן של משימות – החל מתכנית הלימודים וחומרי הלימוד, דרך האופן שבו המורה מציג את המשימה בכיתה, האופן שבו התלמידים מבצעים את המשימה, ולבסוף – הלמידה של התלמידים (איוור 5). אחד הממצאים שלהן הוא שהדרישה הקוגניטיבית של משימה לעיתים קרובות יורדת עם יישומה בכיתה. זה קורה, למשל, כאשר המורה מפשט את הבעיה, מפרק אותה לחלקים, ו/או מדריך את התלמידים איך לפתור. עם זאת, הם מצאו שתלמידים לומדים יותר ממשימה שהתחילה את דרכה כמשימה עם דרישה קוגניטיבית גבוהה גם אם במהלך השלבים השונים – הדרישה הקוגניטיבית ירדה, בהשוואה למשימות שמלכתחילה היו עם דרישה קוגניטיבית נמוכה. זה אומר, בין היתר, שחשוב להעמיד מראש משימות עם דרישה קוגניטיבית גבוהה.



איור 5: The Mathematical Tasks Framework
(מבוסס על: Stein & Smith, 1998)

סטיין וסמית (1998) מונות גורמים שמסייעים לשימור רמה גבוהה של דרישה קוגניטיבית של משימה, ביניהם: מתן תמיכה (Scaffolding) לחשיבה והנמקה של התלמידים; בנייה של משימות הנשענות על ידע קודם של התלמידים; הפניית תשומת הלב של התלמידים לקשרים קונספטואליים; מתן משוב לתלמידים ודרישה מהם לנמק ולהסביר; הקצאת מספיק זמן למשימה (אך לא יותר מדי); הדגמה של ביצוע ברמה גבוהה (ע"י המורה או תלמידים המסוגלים לכך); מתן כלים מטה-קוגניטיביים לתלמידים, לבקרה עצמית ולמעקב אחר ההתקדמות של עצמם.

סטיין וסמית (1998) מונות גם גורמים שעלולים להוריד את רמת הדרישה הקוגניטיבית של המשימה, ביניהם: הפיכת חלקים מאתגרים של המשימה לשגרתיים (למשל ע"י הכוונה מפורשת לצעדים ולפרוצדורות שיש לבצע); מעבר מדגש על משמעות והבנה לדגש על נכונות הפתרון ושלמותו; הקצאת מעט מדי זמן להתחבטויות שחיוניות לתהליך הפתרון; היעדר מחויבות של התלמידים לקחת אחריות על תוצרים ותהליכים ברמה גבוהה.

3.5.3 מערכת הקטגוריות שפותחה לניתוח משימות אורייניות

תוך התבוננות באוסף המשימות בתכנית הלימודים שיש להן זיקה לאוריינות מתמטית, הבחנו בדוגמאות רבות שקשורות לעולם האמיתי ובכל זאת אינן אורייניות – בלשונה של Vos (2020), משימות מולבשות. יש גם משימות שהן אורייניות רק באופן חלקי. כדי לאפיין את המשימות, גיבשנו מערכת של שישה קריטריונים מרכזיים שנראו לנו רלוונטיים בבואנו להעריך ולאפיין משימות אורייניות. החשיבות של מערכת כזאת נעוצה במקומן המרכזי של משימות לימוד בתהליכי ההוראה והלמידה ובידיעה שללא ניתוח מעמיק של הפוטנציאל הגלום במשימה, קשה לקבוע באיזו מידה היא עשויה לסייע לקידום המטרות של פי"ה.

הניתוח שלנו מתייחס לפתרון הבעיות על ידי תלמידים שלא היה להם ניסיון קודם במשימות מאד דומות, מאחר והתנסות קודמת במשימה דומה עלולה להפחית את הדרישה הקוגניטיבית של המשימה. לעומת זאת, ההנחה היא שמדובר ביישום של כלים מתמטיים הידועים לתלמידים באיזושהי רמה. מאחר שכמעט ולא מצאנו במסמכי תכנית הלימודים משימות מחיי היום-יום שבאמצעותן התלמידים אמורים לבנות כלים מתמטיים (ברוח RME), לא התייחסנו לכיוון הזה בניתוח. כאמור, את המטרות המרכזיות של המסגרת של פי"ה אפשר להשיג גם באמצעות יישום של כלים ידועים למשימות מציאותיות. בנוסף, לא לקחנו בחשבון באיזו דרך תשולב המשימה בהוראה. למשל, אם המורה יכוון ויסגיר מידע חבוי שעל התלמידים לזהות ולהעריך את הרלוונטיות שלו לפתרון, הדרישה מהתלמידים תשתנה. ההנחה היא שהתלמיד נמצא במרכז תהליכי ההוראה והלמידה, והמורה מציע הנחיה לתלמידים באופן דיפרנציאלי, לפי הצורך.

מערכת הקטגוריות שפיתחנו נועדה למורים ולמורי מורים למתמטיקה – כדי לסייע בבנייה, התאמה, ו/או בחירה של משימות אורייניות ברמות גבוהות. זאת מיומנות קריטית הדרושה למורה לצורך שילוב מושכל של משימות אורייניות בשיעורי המתמטיקה, שרצוי לכלול בתכנית הכשרה והתפתחות מקצועית של מורים למתמטיקה. יש לקחת בחשבון שמשימות אורייניות מורכבות לוקחות זמן, וכדי למצות את הפוטנציאל שלהן חשוב להקדיש להן את הזמן הדרוש, שעשוי להתפרש על מספר שיעורים. כדי שניתן יהיה לעשות זאת באופן יעיל, המאפשר לא לזנוח מטרות אחרות של ההוראה, חשוב שהעיסוק במשימות אורייניות יהיה חלק בלתי נפרד משגרת ההוראה, משולב בתוך הנושאים של תכנית הלימודים. משימות לפתיחת נושא הן מעצם טבען חדשות לתלמידים, לכן מתאים ומומלץ לפתוח נושאים מתמטיים עם משימות אורייניות, ככל שניתן.

1. **אפיון הקשר של הבעיה לעולם המציאותי.** בדומה ל-Vos (2020), התייחסנו לשתי תת-קטגוריות – האחת קשורה לסיטואציה המתוארת בבעיה (עד כמה היא אותנטית או נתפסת כמציאותית), והשנייה – לשאלה הנשאלת (עד כמה היא הגיונית ועונה על צורך מתקבל על הדעת). אם הקשר למציאות הוא רופף, שטחי ולא משכנע, מן הסתם התלמידים לא יפתחו הבנה והערכה לכוחה של המתמטיקה בפתרון בעיות אמיתיות.

2. **תהליכי מידול הנדרשים מהתלמיד.** המסגרת של פיז"ה מדגישה את הקשר בין אוריינות מתמטית למידול, ומייחסת חשיבות לשלושת התהליכים המרכזיים בפתרון משימות מידול (ניסוח, יישום, ופירוש והערכה). כאמור בגוף הדו"ח, לא תמיד כל התהליכים מתלווים למשימה. אולם לצורך תכנון ההוראה, ובמיוחד על מנת להבטיח הזדמנויות של למידה משמעותית ומעמיקה שתחזק את הבנת הקשרים בין העולם המתמטי לעולם האמיתי, חשוב לבחון באיזו מידה משימה מחיי היום-יום אכן מזמנת את שלושת התהליכים הללו.

3. **דרישה קוגניטיבית של המשימה.** על מנת לפתח את רמות החשיבה, חשוב לכלול בהוראה משימות עשירות (RME) ברמת חשיבה גבוהה. לכן דרושה קטגוריה המבחינה בין משימות עם דרישה קוגניטיבית נמוכה לכאלה עם דרישה קוגניטיבית גבוהה. יש לקחת בחשבון שזה ניתוח תיאורטי, וכאמור, בפועל – הרמה תלויה גם במידת ההיכרות הקודמת של התלמידים עם הבעיה או בעיות מאד דומות, וגם בתפקיד המורה כמנחה.

4. **נגישות המשימה לתלמידים ברמות שונות.** מאחר שכל כיתה היא הטרוגנית באיזושהי מידה, על מנת להגיע לכמה שיותר תלמידים בכיתה, חשוב שלמשימה תהיה "רצפה נמוכה ותקרה גבוהה", כלומר אפשרויות כניסה שונות כך לכל תלמיד יהיה אתגר בהתאם לרמתו. זה אומר שלא כל התלמידים חייבים לעבור את כל השלבים ולהגיע לפתרון המלא. כך ניתן להבטיח שלתלמידים שמסוגלים לכך, המשימה תהיה מאתגרת ותחייב חשיבה ברמה גבוהה.

5. **רמת האוריינות והקשר למטרות העל של פיז"ה.** למרות שאין מדד אובייקטיבי ומוחלט לקביעת רמת האוריינות של משימה, אפשר להעריך את הפוטנציאל של המשימה בהשגת מטרות העל של פיז"ה, כלומר, פיתוח היכולת להשתמש במתמטיקה לצורך פתרון מושכל של בעיות במגוון הקשרים מהעולם האמיתי, וההבנה של כוחה ותפקידה של המתמטיקה בעולם. מסתבר שמשימה אוריינית (או לכאורה אוריינית) עלולה לא רק להחטיא את המטרה אלא אפילו לפגוע במטרות, ולהשאיר את התלמיד ברושם שהקשר למציאות הוא מלאכותי ושהמתמטיקה לא באמת עוזרת לפתרון בעיות אותנטיות. לכן חשוב להתייחס לקטגוריה זו בעת ניתוח של משימה.

6. **דרכים למינוף המשימה.** כפי שהדגמנו בנספח, כמעט כל משימה אפשר ללשדרג כך שתהיה יותר מציאותית, עשירה, או ברמה גבוהה יותר (Vos, 2020). חשוב לפתח מודעות ויכולת של מורים למנוף בעיות אורייניות כך שיתאימו לפיתוח רמות חשיבה גבוהות (Silver, 2016).

בנספח נדגים את הניתוח על חמש משימות שונות באמצעות מערכת הקטגוריות שפיתחנו ונתייחס לפוטנציאל שלהן לפיתוח אוריינות מתמטית במובן הרחב. כך גם נחדד את הקביעה שלנו שמשימות אורייניות אינן בהכרח שוות ברמת האוריינות שלהן ובפוטנציאל שלהן לפיתוח אוריינות מתמטית.

לסיכום הפרק הזה, נביא מסקנות של צוות מומחים לגבי דגשים ודרכים מומלצות ללמד מתמטיקה:

We need to take action to create classrooms and learning environments where students are **actively engaged with worthwhile tasks** that promote mathematical understanding, problem solving, and reasoning. These students are working collaboratively as well as independently, using a range of concrete, print, and technological resources. They are interacting with one another and with their teacher, and they are focused on making sense of mathematics, comparing varied approaches to solving problems, and defending, confirming,

verifying, or rejecting possible solutions. They are learning in classrooms that reflect our technological age, offering digital tools that allow teachers to take learning much deeper than ever before. (NCTM, 2014, p. 109).

4. ביקורת על פיז"ה

המחקר של פיז"ה בעל היקף עצום, נעשה במקצועיות רבה ועוסק בהיבט סוציולוגי וחינוכי המתועד היטב. המחקר מאפשר השוואה בינלאומית נרחבת, היוצרת השראה ורעיונות חדשים. המסגרת התיאורטית של פיז"ה הביאה לזיהוי של אוריינות כנחוצה לחיים טובים של הנוער בעתיד. תוצאות המבחנים, במיוחד בשנת 2003, הביאו למודעות שהבנה עמוקה של המתמטיקה איננה מבטיחה יכולת ליישם את כלי המתמטיקה לסיטואציות מהעולם האמיתי. פיז"ה העלתה את החינוך לדיון ציבורי, בינלאומי ולאומי, וכתוצאה מכך מדינות רבות התחילו לבחון מחדש את תכניות הלימודים שלהן במתמטיקה דרך העדשה של אוריינות מתמטית.

מרבית הביקורות המושמעות על המחקר של פיז"ה קשורות לניהול המבחנים (החל מבניית הפריטים ועד לניתוח ופרסום הממצאים) ולתחרות בין מדינות שהוא יוצר. אחת הבעיות של פיז"ה היא המחויבות הרבה להתאמה ו"יישור קו" עם הסטנדרטיזציה העולמית, תוך שימוש פוליטי וכלכלי בתוצאות פיז"ה. יש הטוענים שהמרוץ לשיפור תוצאות פיז"ה פוגע בהוראה ובלמידה של מדעים (ומתמטיקה). הנושאים הנבחרים למסגרת של פיז"ה מאפילים על נושאים אחרים חשובים לא פחות. כמו כן קיים לעיתים ניגוד רב בין המלצות אנשי חינוך אל מול ההמלצות מתוצאות פיז"ה. תוצאות פיז"ה נתפסות כמדידה אולטימטיבית של איכות מערכת החינוך ובמדינות מסוימות משפיעות על מערכת הבחירות.

בשל ריבוי המדינות המשתתפות במבחן פיז"ה, תהליך בניית פריטי המבחן מתחיל בהצעות של חברי מדינות ה-OECD. לאחר מכן, לכל פריט נבחנת השאלה עד כמה הוא "אובייקטיבי", מבחינת ההקשר שלו. במקרים בהם נמצאים פרטים שקרובים יותר למציאות במדינה אחת, מאשר ביתר המדינות המשתתפות, הפריט ייחשב כפריט מוטא וייפסל. באופן דומה, פריט שנכלל בתכנית לימודים של אחת המדינות, ייפסל גם הוא. לדוגמה, בנוורבגיה לא יכללו שאלות על נפט או על גז או עוד נושאים הקרובים לחיי היום-יום של האוכלוסייה החיה בנוורבגיה, כמו שלג, סקי או חיות פרא. כך קורה שלבסוף הפריטים הנכללים במבחן הם חסרי הקשר רלוונטי ולא קשורים לאירועים אמיתיים המתרחשים בחיי התלמידים. זאת בניגוד להגדרה של אוריינות במסגרת התיאורטית של פיז"ה.

היבט נוסף שמקשה מאוד על מבחני פיז"ה במתמטיקה (ובמדע) הוא מורכבות הטקסט בעקבות השפה והתרגום. במטרה לזמן מצב אותנטי הטקסטים הם מאוד ארוכים ובכך בוחנים יותר את היכולת לקרוא ולהבין מידע מתמטי או מדעי (הבנת הנקרא). ביקורת זו נלקחה בחשבון במבחנים האחרונים. בגלל הצורך בקריאה רבה ההצלחה של בנות גבוהה מהצלחתם של בנים במבחני פיז"ה. לעומת זאת, כשהמבחן ממוחשב יש יתרון עולה לבנים. גם התרגום משחק תפקיד חשוב. למרות ההנחיות המדויקות ביותר לתרגום, חלים שינויים מהותיים בתוכן כך שבחלקם מקלים על המענה על השאלות. התרגום יכול גם להשפיע על העניין שהתלמיד מוצא בקריאה עצמה (Sjøberg, 2015).

בעיה נוספת של פיז"ה נעוצה בפערים בין טבען של משימות אורייניות עשירות, הדורשות זמן ומאמץ מתמשך, לבין משימות שיש מקום לתת במצב של מבחן, שבו מטבע הדברים יש אילוצי זמן. במקומות שנוטים להכין תלמידים למבחני פיז"ה (ויש מדינות כאלה), עלולים להסתפק במשימות "מקוצרות" שלא פותחות את אותן הזדמנויות לפתח אוריינות ברמות גבוהות.

יש מושגים שמופיעים במסגרת של פיז"ה 2021 במשמעויות כמעט זהות. כך, למשל: 1. "מידול" (modelling), "מעגל פתרון בעיות" (the problem solving cycle), ו"מתמטיזציה"; 2. חשיבה מתמטית (mathematical thinking) והנמקה מתמטית (mathematical reasoning); 3. "מיומנויות", "כישורים", ו"יכולות"; 4. חשיבה כמותית (quantitative reasoning) ותובנה מספרית (numeracy), ויש המזהים תובנה מספרית עם אוריינות מתמטית. התוצאה היא שנוצרת אי בהירות לגבי המשמעות של המונחים השונים. בנוסף, ריבוי הקריטריונים

לתיאור הכישורים ורמות החשיבה השונים מקשה על ראיית התמונה הכללית, ויוצר תחושה של "רשימת קניות" (Stacey, 2015). עדיף, לדעתנו, להסתכל על מרכיבי המסגרת הקונספטואלית בצורה יותר הוליסטית.

אחת השאלות העולה מהמסגרת הקונספטואלית של פיז"ה היא לגבי הסוגיה של למידת מתמטיקה בהקשר. כפי שצינו, המסגרת המושגית של פיז"ה איננה מהווה גישה כללית להוראת מתמטיקה, אך היא מדגישה את הלמידה ופתרון בעיות בהקשר. יש הסוברים שלמידה בהקשר מגבילה ועלולה להנמיך את רמת הידע וההבנה המתמטיים. גם סוגיה זו תלויה במידה רבה במורה ובחומרי הלימוד. למידה בהקשר מייצרת את הבסיס שעליו נבנית ההבנה העמוקה של המתמטיקה, בדומה למקרים פרטיים שהינם הכרחיים לצורך הכללה. אם נעצרים בשלב הדוגמאות מן ההקשר, אז הידע המתמטי שנבנה עלול להיות מוגבל.

לעומת תיאוריות שמדגישות את העליונות של מבנים מתמטיים שנוצרים תוך השתחררות מההקשר ורואות בהכללות משוחררות מהקשר מטרה עליונה של למידת מתמטיקה, תיאוריות אחרות מדגישות את חשיבות ההקשר שבו נוצרים המבנים המתמטיים, ואת התרומה של חשיפה להקשרים מרובים להתפתחות מבני הידע המתמטי בתהליך ההפשטה. שתי התיאוריות אינן עומדות בסתירה זו לזו אלא יש בהן השלמה הדדית (Schwarz, Dreyfus, & Hershkowitz, 2009). הראשונות מעשירות את התיאוריה בתיאור התהליכים בהם נבנה ידע חדש מתוך ידע קיים באופן הירארכי, ואילו האחרונות מדגישות סוגים שונים של פעילויות שתומכות בלמידה.

לפיכך, נראה כי אפשר ללמד ברוח המסגרת של פיז"ה ולהגיע לרמות חשיבה גבוהות והבנה מעמיקה של המתמטיקה ושל תפקידה בפתרון בעיות בחיי היום-יום באמצעות משימות מידול ומשימות אורייניות המעוגנות בהקשרים.

5. ההשפעה של פיז"ה על תכנית הלימודים בישראל

מבחינת פיז"ה השפיעו רבות על מדינות שונות באופנים שונים. מדינות כמו הולנד ודנמרק, שבהן רווחת תכנית הלימודים הראליסטית (RME), לא שינו דבר בהשפעת פיז"ה. הייתה הלימה מלאה בין גישתם לגישת פיז"ה. אולם יש מדינות שהפער בין תכנית הלימודים שלהן לבין המסגרת התיאורטית של פיז"ה היה מאד גדול והביא לבחינה מחודשת של תכניות הלימודים שלהן, ולשינויים והתאמות בהן. חלק מהסיבות קשורות לרצון שהתלמידים יצליחו במבחני פיז"ה. אבל היו גם מדינות שהשתכנעו בחשיבות של הכנת התלמידים לחיים האזרחיים ברוח פיז"ה.

ד"ר חנה פרל, שכיהנה במשך שנים כמפמ"ר מתמטיקה, סקרה את השפעת פיז"ה על ישראל (Stacey, et al., 2015). לדבריה, התפיסה שעמדה ביסוד תכנית הלימודים בארץ מאז ומתמיד הייתה שכלי ההפשטה וההנמקה המתמטיים יכולים וצריכים לשמש לתיאור העולם סביבנו ולכן מהווים מרכיב הכרחי לפתרון בעיות של כל תלמיד. אולם הייתה אמונה שציוד של תלמידים בכלים אלה מספיק כדי להבטיח שיוכלו להשתמש בהם לכשיזדקקו לפתור בעיות במגוון של הקשרים. במונחים שתוארו מוקדם יותר, לימודי המתמטיקה התרחשו בעיקר בעולם המתמטי, למעט שילובן של בעיות מילוליות שלא בהכרח היו מעוגנות בסיטואציות אמיתיות.

למרות שתכניות הלימודים לחטיבת הביניים ולחטיבה העליונה הצביעו על החשיבות בפיתוח יכולות של התלמידים להחליט כיצד ומתי להשתמש במושגים מתמטיים, בפועל הוראת המתמטיקה בבתי הספר הדגישה הבנה ומיומנויות מתמטיות מסורתיות, ולא עסקה בפיתוח היכולת של התלמידים ליישם את הידע המתמטי שלהם כדי לפתור בעיות אותנטיות בסיטואציות שונות.

תוצאות המבחנים הבינלאומיים, טימס (TIMSS) ופיז"ה, הביאו למודעות שהיכולת לזהות מתי נדרש ליישם את הכלים המתמטיים שנרכשו וכיצד לעשות זאת, אינה מתפתחת מעצמה, אפילו לא אצל תלמידים עם נטייה למתמטיקה, ושצריך ללמד זאת בצורה מפורשת, גם לתלמידים חזקים במתמטיקה וגם לכאלה שאינם נוטים למתמטיקה. תובנה זו הביאה את קובעי המדיניות החינוכית ומפתחי תכניות הלימודים במתמטיקה לבחון מחדש את תכניות הלימודים (לכיתות ז'-י"ב) ולחשוב מחדש במונחים של תוכן, מיומנויות, תהליכים והקשרים שיש להם הפוטנציאל להביא את התלמידים להישגים באוריינות מתמטית כפי שהוגדרה במסגרת המושגית של פיז"ה.

היה ויכוח לגבי המקום של הוראת אוריינות מתמטית לכלל התלמידים. הגישה היישומית קיבלה מקום חשוב, אבל לא התקבלה כגישה העיקרית וגם לא כסוגיה המארגנת היחידה של תכנית הלימודים (not the only organizing theme of the curriculum). היבטים נוספים, שנחשבים לא פחות חשובים מהשימושים של המתמטיקה, כוללים: לימוד מתמטיקה לצורך הנאה אינטלקטואלית; התייחסות להיבטים אסתטיים של המתמטיקה; הערכה של המתמטיקה כהישג תרבותי אדיר של האנושות; מבנים מופשטים ופתרון בעיות מתמטיות "טהורות", ופיתוח חשיבה מסדר גבוה. וועדת התכנית במתמטיקה לחטיבת הביניים לקחה את כל ההיבטים הללו בחשבון.

אוריינות מתמטית הפכה לחלק מתכנית הלימודים החדשה בחט"ב, לכלל התלמידים. למפתחי תכניות לימודים ומחברי ספרי לימוד במתמטיקה התחוו כי אפשר למצוא יישומים משמעותיים, מעניינים ואוטנטיים שיכולים לאתגר תלמידים בשכבות גיל שונות ובעלי יכולות מתמטיות שונות. חלקה של המתמטיקה הפורמלית הצטמצם בחט"ב ועבר לכיתות הגבוהות יותר. הייתה הסכמה שכדי שתלמידים יוכלו להתמודד ביעילות עם משימות (אורייניות) שהם אינם מורגלים להן, צריך יהיה גם ללמד בדרכים אחרות. לשם כך, פותחו דרכי הוראה חדשות, פותחו חומרי לימוד, נערכו השתלמויות מורים, ומונו מנחים בבתי הספר לסייע למורים.

6. קשרים בין תכנית הלימודים בישראל לאוריינות מתמטית לפי פיז"ה

כאמור, במסגרת המושגית של פיז"ה אוריינות מתמטית מתוארת כ"יכולתו של הפרט לחשוב חשיבה מתמטית ולנסח, ליישם ולפרש מתמטיקה כדי לפתור בעיות במגוון הקשרים מהעולם האמיתי. היא כוללת מושגים, פרוצדורות, עובדות וכלים שמטרתם לתאר, להסביר ולחזות תופעות שונות. היא מסייעת לאנשים להבין את תפקידה של המתמטיקה בעולם ולגבש דעות והחלטות מבוססות כמתבקש מאזרחים תורמים, מעורבים וחושבים במאה ה-21". הכישורים והההליכים המפורטים במסגרת המושגית של פיז"ה מהווים כולם חלק ממושג האוריינות.

על מנת לחקור את יחסי הגומלין בין המושגים העיקריים המופיעים במסגרת המושגית של פיז"ה למקומם ומשמעותם בתכנית הלימודים בארץ, התייחסנו לאוסף גדול של מקורות: תכנית הלימודים הרשמית (המוצהרת) במתמטיקה לחט"ב; תכנית הלימודים הנהוגה, הכוללת את ההנחיות הרשמיות הנשלחות לבתי הספר במסגרת חוזרי מפמ"ר או מתפרסמות באתר של מפמ"ר המתמטיקה (אתר הפיקוח על הוראת המתמטיקה); ההנחיות שנשלחו למפתחים של ספרי הלימוד שנכתבו לקראת החלת תכנית הלימודים החדשה לפני כעשר שנים. לתכנית הלימודים המיושמת התייחסנו בעקיפין באמצעות מבחנים ארציים הנערכים בבתי הספר: מבחני מפמ"ר בכיתות ז ובכיתות ט ומבחני מיצ"ב בכיתות ח. למבחנים אלה יש השפעה על מה מורים מלמדים ומיישמים בפועל מתוך תכנית הלימודים, ובהקשר של המסמך הזה – על אילו היבטים של אוריינות מתמטית מושם דגש. מבחני מפמ"ר הינם מבחנים המסמכים את שנת הלימודים בכיתה ז ובכיתה ט. בתי הספר עורכים את המבחנים בחלק מהשנים כמבחנים פנימיים הנותנים להם תמונה היכן נמצאים התלמידים שלהם מבחינת רמת הלמידה במתמטיקה ובחלק מהשנים כמבחן חיצוני שתוצאותיו נשלחות למפמ"ר.

במסמכים שבחנו, מושג האוריינות לא תמיד מופיע בצורה מפורשת. בשלב הראשון בדקנו את ההתייחסות המפורשת לאוריינות בתכנית הלימודים ובמסמכים רשמיים נלווים שיש להם השפעה על ההוראה בכיתות. בהמשך בחנו מקומות במסמכים אלה שבהם יש הנחיות לקשר את התוכן המתמטי לעולם האמיתי, והתייחסנו גם לקטגוריה שלישית של משימות – משימות שנראה שממלאות את התפקיד של "משימות אורייניות" בכך שהן "מסייעות לאנשים להבין את תפקידה של המתמטיקה בעולם, ולגבש דעות והחלטות מבוססות כמתבקש מאזרחים מעורבים וחושבים בעולם האמיתי". ניתוח של משימות מהקטגוריה השלישית מורכב יותר, מאחר והשימוש במלים ונתונים שבמבט ראשון מתקשרים לעולם האמיתי עדין לא מבטיח שהמשימה אמנם תמלא את התפקיד הזה. כדי לשייך משימה לקטגוריה השלישית, צריך לוודא שהפעילות המתמטית הנדרשת מהלומד לא רק משתמשת במילים ומושגים של העולם האמיתי, אלא גם שהנתונים מבטאים מידע שהוא בדרך כלל אינו גלוי בעולם האמיתי, והלומד מתבקש להשיג מידע שאינו זמין לו בדרך ישירה. לצורך הניתוח, בנינו כמה קריטריונים לניתוח משימות מתמטיות בהקשר של אוריינות מתמטית.

בשלב השני התייחסנו לכישורים, יכולות, ותהליכים מתמטיים הכלולים במסגרת המושגית של פיז"ה, כדי לבדוק עד כמה מכוונת תכנית הלימודים לפיתוח היכולות והתהליכים האלה, גם אם לא בדרך שמקושרת לעולם האמיתי. זאת במטרה לנסות ולהבין מהו הגשר שניתן לבנות כדי שהכישורים אליהם מכוונת תכנית הלימודים לחטיבת הביניים בישראל, ישמשו גם את המטרה לסייע ללומדים להבין את תפקידה של המתמטיקה בעולם האמיתי, ולגבש דעות והחלטות מבוססות על כישורים מתמטיים אותם רכשו בבית הספר.

6.1 התייחסות מפורשת לאוריינות בתכנית הלימודים במתמטיקה לחטיבת הביניים⁸

הופעה מפורשת של המושג אוריינות מצאנו בתכנית הלימודים במקומות ספורים בלבד, אך מצאנו גיבוי ופרשנות במסמכים רשמיים אחרים המשפיעים, או לפחות מיועדים להשפיע על ההוראה בבית הספר. במסמכי תכנית הלימודים מצאנו את המושג אוריינות רק בתכניות הלימודים לכיתה ז' ולכיתה ט'.

במסמכי תכנית הלימודים לכיתה ז' מושג האוריינות מופיע פעם אחת בעקרונות התכנית:

" כל נושא יכול לזהו, חשיבה אלגוריתמית, חשיבה תהליכית (יישום בהקשרים מוכרים) וחיפוש פתוח. בפרט, יש לשלב בעיות אורייניות מתוך מציאות קרובה לתלמידים".

למרות שעיקרון זה אינו מפורט, ניתן לראות בו את המאפיינים העיקריים של מסגרת פיז"ה: שימוש בכישורים שונים, בתהליכים שונים וברמות חשיבה שונות, כדי לעסוק בבעיות של העולם האמיתי.

בתכנית הלימודים לכיתה ט' ניתן למצוא התייחסות לאוריינות נרחבת יותר. במבוא:

"משימות אורייניות ועיבוד נתונים ישולבו בכל פרק לימוד שבו זה אפשרי".

ההנחיה לשלב משימות אורייניות בכל פרק בו זה אפשרי באה לידי ביטוי גם בהנחיות לכותבים של ספרי הלימוד לכיתה ט', עם בקשה מפורשת:

"כל ספר יכול לכלול לפחות 6 משימות רחבות יריעה של אוריינות מתמטית במהלך השנה. דוגמאות למשימות כאלה מופיעות באתר האגף לתכנון ולפתוח תכניות לימודים. במידת הצורך, ניתן להתייעץ לגבי אופי המשימות במפמ"ר מתמטיקה". (מתוך מכתב מ- 20.11.10 לכותבי ספרי הלימוד)

בקשה זו באה לידי ביטוי גם בטופס ההערכה בו התבקשו מעריכי הספרים לאשר שביצעו:

"שילוב אוריינות מתמטית - לפחות 10 משימות שחלקן רחבות יריעה, פתרון בדרכים שונות, שאלות מילוליות המשולבות במגוון נושאים, ולא רק הוראתם כפרקי לימוד עצמאיים".

בהערה אודות משימות אורייניות כתוב במפורש:

"החשיבות במשימות אורייניות היא ביצירת "בעיות בהקשר", שיאפשרו לתלמידים לזהות, לעסוק ולהשתמש במתמטיקה במגוון הקשרים תוך מידול, הסבר, הסקת מסקנות בעלות משמעות לעולם האמיתי וחיזוי".

גם בחוזר מפמ"ר תשע"ד, בחלק המתאר את רוח התכנית החדשה לחטה"ב נאמר:

"לימודי המתמטיקה בחטיבת הביניים מקדמים שיח לימודי חשוב המקשר את חיי היום-יום של התלמיד לנלמד במקצוע המתמטיקה. הלמידה המשמעותית נתמכת על ידי משימות אוריינות מתמטיות בנושאים הנלמדים בתכנית הלימודים, העוסקות בפתרון בעיות המחייבות שימוש במידע זמין מחיי היום-יום, ומזמנות מיומנויות ושיקולים מתמטיים בפתרון".

בחוזר זה ניתנת הנחייה למורים:

⁸ בהתייחסות לתכנית הלימודים נכללים גם מסמכים נלווים לתכנית הלימודים.

"המורים מתבקשים להדגיש בהוראתם ניתוח מילולי של שאלות, פתרון שאלות מילוליות שגרתיות, פתרון של שאלות שאינן שגרתיות ולשלב שאלות מסוגים אלה בבחינות התקופתיות של התלמידים לאורך השנה. באתר המפמ"ר נמצאת תכנית לימודים מוארת במשימות אורייניות."

http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Mazkirut_Pedagogit/Matematika/ChativatBeinayim/oranut/Tal.htm

קישור זה כולל משימות אורייניות שניתן לשלב ברוב פרקי הלימוד לאורך שלוש שנות הלימודים בחט"ב. קיומו של הקישור הזה מעיד על כך שאורייניות לרוב מהווה חלק נפרד מתכנית הלימודים השוטפת והמורים "אחראים" לשלב מפעם לפעם פעילויות מסוג זה. מצב זה עלול להביא לחוסר רציפות בטיפוח המיומנויות והכישורים האורייניים הנשענים על התנסויות במשימות מסוג זה. בנוסף לרצף הדרוש כדי לפתח אורייניות מתמטית אצל התלמידים, חשוב לא פחות שייחשפו למסה קריטית של משימות אורייניות. מעניין שההנחיה היחידה למורים שמופיעה באתר בהקשר למשימות הללו היא הנחיה מאד כללית, שאיננה מתייחסת לטבען המיוחד של משימות אורייניות וגם איננה קובעת מה היקף השעות שיש להקדיש למשימות אלה:

"מצופה מהמורים להיכנס באופן קבוע לאתרים אלה ולשלב את המשימות והפעילויות באופנים שונים: בכיתה במהלך השיעור, כשעורי בית, כמשימות הערכה, בשעות פרטניות ועוד."

לסיכום הסעיף הזה:

- בתכנית הלימודים יש ביטוי לאורייניות המתמטית, בדרך כלל בהקשר של "משימות אורייניות"
- למרות שאין הגדרה מפורשת ל"משימות אורייניות", ניתן לראות באזכורים השונים את הזיהוי של משימות אורייניות עם "חשיבה כמותית" וקשר עם העולם האמיתי.
- במסמכים הנלווים יש דרישה לשלב משימות אורייניות בהוראה, ולשלבן בפרקי הלימוד הרלוונטיים.
- בתכנית הלימודים ובמסמכים הנלווים יש דרישה לשילוב משימות אורייניות המתמטיות לעולם האמיתי בספרי הלימוד שנכתבו עבור התכנית החדשה לחט"ב, ויש הפנייה למקורות בהם ניתן למצוא משימות מסוג זה.
- מהמסמכים שבדקנו עולה שהמשימות האורייניות הן לעתים משימות נפרדות מתכנית הלימודים, המופיעות מחוץ לספרי הלימוד. יתרה מכך, אוספי המשימות האורייניות הנמצאות באתר של משרד החינוך אמנם מקובצות לפי התכנים המתמטיים שעליהן הן נשענות, אך ללא שום הנחיות למורה מה המטרה של כל משימה ובאילו דרכים רצוי לשלב אותה בהוראה.
- מהמסמכים שבדקנו עולה שהמשימות האורייניות לרוב מיישמות תכנים שנלמדו, ואינן משמשות נקודת מוצא לבניית מושגים ועקרונות מתמטיים (ר' גישות לקישור בין המתמטיקה לעולם האמיתי שתוארו בסעיף 3.3).

6.2 התייחסות לא מפורשת לאורייניות בתכנית הלימודים במתמטיקה לחטיבת הביניים

ראינו שאורייניות ומשימות אורייניות מוזכרות בצורה מפורשת בעיקר בתכנית הלימודים לכיתה ט'. בסעיף זה נראה שגם בחלקים האחרים של תכנית הלימודים ניתן למצוא, באופן פחות מפורש, מאפיינים של אורייניות מתמטית שתואמים את הגדרתה במסגרת המושגית של פיז"ה. יתרה מזו: נראה שבפועל, בתכניות הלימודים לכיתות ז' ו-ח' הדגש על פיתוח האורייניות המתמטית גדול בהרבה הן בדגשים המוצהרים של תכנית הלימודים והן בדוגמאות המלוות אותה.

כיתה ז'

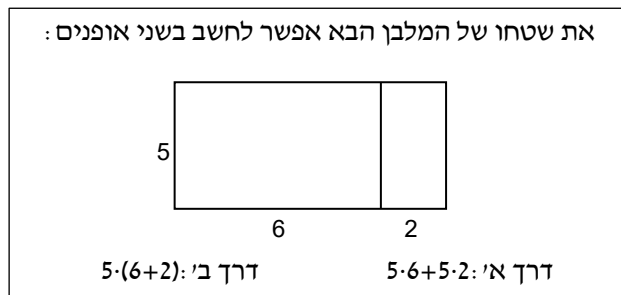
המילה אורייניות נזכרת פעם אחת בלבד בהקשר של משימות אורייניות. אולם מבלי לדבר על אורייניות, יש בתכנית הרבה מקומות בהם ממליצים ללמוד תכנים בהקשר של העולם האמיתי, ובאמצעות דוגמאות הממחישות את

התועלת שבשפה האלגברית, אותה רוכש התלמיד בשנה זו (משתנים, ביטויים אלגבריים, משוואות עם בעיות מילוליות). למשל:

"מוצע להציג ביטויים אלגבריים גם דרך דוגמאות הממחישות את התועלת שבהם כהמשך להצגת המושג משתנה"

לדוגמה, חוק הפילוג מוסבר (במקרה של מספרים חיוביים) באמצעות דוגמה מהעולם האמיתי/מוחשי (ההנחה היא שהמלבן נתפס כאובייקט פיסי):

דוגמה:



פרקים רבים בנויים כמעט באופן מלא על דוגמאות מהעולם האמיתי (למשל, פרקי הגאומטריה: מלבן, תיבה, שטחי מצולעים, מנסרה; וחלקים מאלגברה: קריאת גרפים, מבוא לפונקציות).

יחד עם זאת בחלק מפרקי תכנית הלימודים לכיתה ז' הדוגמאות אינן מדגימות זיקה לעולם האמיתי. לדוגמה, נושא החזקות, שקל וחשוב לבסס אותו באופן שמסביר תופעות בעולם האמיתי מוצג בתכנית באופן פורמלי, כמעט ללא כל אזכור של העולם האמיתי. החמצה זו בולטת במיוחד על רקע העיסוק הרב כיום בגידול אקספוננציאלי ושיטוח העקומה. (אפשר, למשל, לקשר בין המחסור בדירות לגידול האוכלוסייה, בין הגידול באוכלוסייה למשתנים שונים כמו גיל הנישואים, מספר ילדים למשפחה ועוד).

כיתה ח'

המילה אוריינות לא מוזכרת כלל, ואף לא מוזכרות משימות אורייניות. עם זאת, תכנית הלימודים מלאה בנושאים ובמשימות המתקשרים לעולם האמיתי. (למשל, ייצוג תופעות בעזרת פונקציות קוויות, יחס, קנה מידה, יחס ישר ויחס הפוך, אחוזים וסטטיסטיקה). גם בלימודי הגאומטריה, בהם מושג בהדרגה יותר דגש על הנמקות והצדקות מאשר בכיתה ז', ממשיכים ליישם את הידע גם כדי להסביר תופעות של העולם האמיתי.

אפשר לסכם ולומר שלמרות שבהצגת המטרות של תכנית הלימודים לא מוזכרת אוריינות, תכנית הלימודים לכיתה ח' היא כנראה העשירה ביותר בתכנים המשקפים את האוריינות על פי הגדרתה במסגרת של פיז"ה. אפשר גם לומר שבתכנים אחרים, שפחות מקושרים עם העולם האמיתי, יש פעילויות שמחזקות את יכולת ההנמקה, שמהווה מרכיב חיוני ומרכזי באוריינות מתמטית.

כיתה ט'

למרות שבתכנית המוצהרת מדובר הרבה על אוריינות, תכנית הלימודים מכילה הכי פחות תכנים המתקשרים עם העולם האמיתי בהשוואה לתכניות הלימודים לכיתות ז' ו-ח'. מתוך 75 השעות המוקדשות לאלגברה (בניכוי השעות המיועדות להסתברות) רק בפרק המיועד לחמש השעות האחרונות (שימושים באלגברה) יש בתכנית הלימודים הפורמלית דגש על קישור התכנים לעולם האמיתי, תוך הדגשת מאפיינים הקשורים להגדרת האוריינות על פי פיז"ה:

"פרק זה נועד לסכם את המושגים, התכונות והחוקים שנלמדו באלגברה במטרה לבסס פרספקטיבה וחוש לגבי מהי אלגברה ומהם שימושיה המגוונים, תוך הדגשת עצמתה ככלי מתמטי. מוצע לממש מטרה זו באמצעות עבודה על סוגים שונים של מטלות בהן תלמידים עוסקים ודנים בייצוג/מידול סימבולי של

בעיות מתחומים שונים לצורך פתרון, הבנה וניתוח של ביטויים סימבוליים, חקר תופעות מספריות שונות (כלליות או שמתקיימות רק במקרים ייחודיים), והבנה ויצירה של הוכחות אלגבריות פשוטות" (עמ' 12).

לסיכום הסעיף הזה:

בסעיף הזה הראינו שאין הלימה בין האזכורים המפורשים של אוריינות ומשימות אורייניות בתכנית הלימודים, לבין התייחסויות לא מפורשות לאוריינות, כלומר, לבין הצעות לשילוב בפועל של תכנים הקשורים לאוריינות מתמטית, בהיבט של הדגשת יכולתו של הפרט לפעול עם המתמטיקה בעולם האמיתי.

6.3 התייחסות בתכנית הלימודים לתהליכים המרכזיים של מעגל המידול

על פי המסגרת המושגית של פיז"ה מידול הוא מרכיב מרכזי באוריינות מתמטית, ובפרט שלושת התהליכים המרכזיים בפתרון בעיות מציאותיות: ניסוח; יישום; פירוש והערכה. המסגרת של פיז"ה מונה לכל תהליך אוסף של פעולות המאפיינות אותו. בחלק זה נבחן את הביטוי שיש בתכנית הלימודים לשלושת התהליכים הללו.

6.3.1 ניסוח

המילה **לנסח** בהגדרה של אוריינות מתמטית מתייחסת ליכולתם של בני אדם לזהות הזדמנויות להשתמש במתמטיקה ולהציע מבנה מתמטי לבעיה המוצגת בהקשר כלשהו. בתהליך הניסוח המתמטי של מצבים, הם מחליטים היכן אפשר לבדוד מתוך המצב את המתמטיקה הדרושה כדי לנתח, להגדיר ולפתור את הבעיה. הם מתרגמים את הבעיה מהעולם האמיתי לתחום המתמטיקה, ומספקים לה מבנה, ייצוגים וייחודיות מתמטיים. הם מבצעים היסקים על האילוצים וההנחות שבבעיה ומבינים את משמעותם.

מטבע הדברים, המאפיינים של ניסוח קשורים לתרגום של **בעיה מהעולם האמיתי** לשפה מתמטית או לייצוג מתמטי. מכיוון שבחלק גדול מהנושאים של תכנית הלימודים לחט"ב ובבעיות בהן עוסקים במסגרת התכנית, לא יוצאים מהעולם האמיתי, נתייחס גם להיבטים בתכנית הלימודים **שמטפחים את יכולות הניסוח**.

מובן מאליו שבאותם נושאים שתכנית הלימודים לא מדגישה את הקשר לעולם האמיתי, גם הפעולות הקשורות לניסוח אינן קשורות בתרגום של בעיה מהעולם האמיתי לשפה מתמטית או לייצוג מתמטי, ובכל זאת, תכנית הלימודים מדגישה, החל מכיתה ז' ולכל אורך שנות הלימוד פעילויות שמטפחות את יכולת הניסוח: זיהוי משתנים; זיהוי המבנה המתמטי (ובכלל זה חוקיות, יחסים ודפוסים) בבעיות או במצבים שונים; פישוט של מצב או של בעיה כדי להקל על הניתוח המתמטי שלהם; ייצוג מתמטי של מצב באמצעות משתנים, סמלים, דיאגרמות ומודלים מקובלים מתאימים; מעבר בין ייצוגים וארגון מחדש של בעיות, זיהוי היבטים ופירוצדורות המתאימים לפתרון בעיות.

מתוך הרשימה הארוכה של פעולות הקשורות בניסוח, המלווה את ההגדרה, לא מצאנו בתכנית הלימודים ביטוי לפעולות הבאות:

- זיהוי האילוצים וההנחות שמאחורי כל מידול מתמטי, וזיהוי ההפשטות שבוצעו על ההקשר.
- הבנה והסבר של היחסים בין השפה המתאימה להקשר שבו הבעיה נתונה, לבין השפה הסימבולית והפורמלית הנחוצה כדי לייצג את הבעיה בדרך מתמטית.
- פעולות ניסוח הקשורות בחשיבה חישובית.
- שימוש בכלים טכנולוגיים (כגון גיליון נתונים או האפשרות לערוך טבלה במחשבון גרפי) כדי להציג את היחס המתמטי הקיים בבעיה כלשהי הנתונה בהקשר.
- יצירת סדרת הוראות מסודרת (צעד אחר צעד) לפתרון בעיות.

6.3.2 יישום

המילה **ליישם** בהגדרה של אוריינות מתמטית מתייחסת ליכולתם של בני אדם להשתמש במושגים, עובדות, הליכים והיסקים מתמטיים כדי לפתור בעיות המנוסחות בדרך מתמטית ולהגיע למסקנות מתמטיות. כאשר בני אדם משתמשים במושגים, עובדות, פרוצדורות והיסקים מתמטיים כדי לפתור בעיות, הם מבצעים את

הפרוצדורות המתמטיות הדרושות כדי לקבל תוצאות ולמצוא פתרון מתמטי. הם עובדים על מודל של המצב המתואר בבעיה, מאתרים חוקיות, מזהים קשרים בין ישויות מתמטיות ומנסחים טיעונים מתמטיים.

תיאור זה של תהליך היישום מלווה ברשימה ארוכה של פעולות הקשורות בו. כל הפעולות הנזכרות ברשימה הן מרכזיות בתכנית הלימודים של חטה"ב, ולכן נמנענו מלפרט אותן. נציין רק שחלק מהפעולות הנזכרות ברשימה קשורות בעניינו בפירוש ובהערכה, ואליהן נתייחס בהמשך: רפלקציה על טיעונים מתמטיים, הסבר של תוצאות מתמטיות והצדקתן; הערכה עד כמה משמעותיים הדפוסים והחוקיות שנצפו (או הוצעו) בנתונים.

6.3.3 פירוש והערכה

המילה **לפרש** (ולהעריך) בהגדרה של אורייונות מתמטית מתמקדת ביכולתם של אנשים לחשוב על תוצאות, מסקנות או פתרונות מתמטיים, ולפרשם במסגרת ההקשר של הבעיה מהעולם האמיתי שמלכתחילה הניעה את התהליך. לשם כך עליהם לתרגם פתרונות או היסקים מתמטיים בחזרה להקשר המקורי של הבעיה ולקבוע אם התוצאות סבירות והגיוניות בהקשר זה. תהליך זה, של פירוש והערכה, הוא קריטי להבנת תפקידה של המתמטיקה בעולם, ולזיהוי ההזדמנויות להתבונן בעולם בעין מתמטית, להתבונן בעין ביקורתית במידע המוצג לאנשים (או מתקבל באמצעות פעולותיהם), ולקבל החלטות מבוססות.

יחד עם זאת הדגשים בתכנית הלימודים המתייחסים לפירוש והערכה הם פחותים ביחס לדגשים הקשורים לניסוח וליישום. מצאנו פרקים שלמים בתכנית הלימודים ללא שום אזכור של פירוש והערכה, וגם לא של הפעולות הכרוכות בפירוש והערכה במסגרת של פיז"ה, למרות שניתן לקשר אותם עם העולם האמיתי: לדוגמה, דמיון משולשים, ערך מוחלט, פתרון משוואות בשני משתנים, גליל, ועוד נושאים רבים אחרים.

בכל הנושאים האלה **גם לא מצאנו בין הדוגמאות פריטים שבהם נדרשים פירוש והערכה**. בפרקים שמצאנו דוגמאות לפירוש והערכה בהקשר של העולם האמיתי, דוגמאות אלה הן מעטות מידי, לדעתנו, מכדי לפתח את הבנת תפקידה של המתמטיקה בעולם האמיתי, ואת ההרגל להתבונן בעולם בעין מתמטית באופן המאפשר לקבל החלטות נכונות ולשפוט מידע באופן ביקורתי.

להלן נציין דוגמאות לדגשים בתכנית הלימודים המתקשרים לפעולות הקשורות בתהליכי פירוש והערכה, כפי שהם מופיעים במסגרת המושגים של פיז"ה, תוך הבחנה בין דגשים בהקשר של העולם האמיתי, ודגשים שאינם קשורים לעולם האמיתי. כל זאת כדי להעריך מה הגשר הנדרש, על מנת לפתח את יכולות הפירוש וההערכה בעולם האמיתי.

דגשים בתכנית הלימודים המתקשרים לפעולות של תהליכי פירוש והערכה

להלן פירוט הפעולות הקשורות בפירוש והערכה, לפי המסגרת של פיז"ה, וקישורן למקומות הרלוונטיים בתכנית הלימודים.

- פירוש מידע המוצג בצורה גרפית ו/או בדיאגרמות:
 - למשל, קריאת מידע מגרפים, בהקשר של העולם האמיתי כמו קריאת קצב שינוי, קריאת מידע סטטיסטי, פירוש של גרפים בפרק הפונקציה הקווית.
- הערכה של תוצאה מתמטית ביחס להקשר שבו היא נתונה, ובהקשר של העולם האמיתי:
 - למשל, בדיקה אם פתרון של בעיה מילולית מתאים גם לבעיה עצמה ולא רק למשוואה. (תכנית הלימודים לא בהכרח מתייחסת לבעיות מהעולם האמיתי, אך בדיקה מסוג זה מפתחת את כישורי הפירוש וההערכה גם בהקשר של העולם האמיתי)
- הערכת הסבירות של פתרון מתמטי כלשהו בהקשר של בעיה מהעולם האמיתי:
 - הדגשים בתכנית הלימודים בהסתברות מספקים אפשרות להתבונן איכותנית במידע ובתוצאות של חישובים. למשל, בתכנית מודגש:

"הסתברות שלפחות אחד משני מאורעות יתרחש אינה יכולה להיות קטנה מהסתברות הנפרדת של כל אחד מהם".

- הסבר מדוע תוצאה או מסקנה מתמטית כלשהי הגיונית – או אינה הגיונית – בהקשר של הבעיה. למשל, בפרק הפונקציה הריבועית מודגש:

"יש לעסוק בשאלות מילוליות הדורשות פתרון משוואה ריבועית במגוון רחב של הקשרים, ובכללן שאלות העוסקות בגופים במרחב. יש לשים לב למצבים שבהם אחד הפתרונות אינו קביל בהקשר של השאלה המילולית".

- הבנת ההיקף והמגבלות של מושגים מתמטיים ושל פתרונות מתמטיים: דוגמה הקשורה לעולם האמיתי: מדדי האמצע בסטטיסטיקה. תכנית הלימודים מדגישה את הבנת היתרונות והמגבלות של כל אחד ממדדי האמצע.

דוגמה שאינה קשורה לעולם האמיתי: בפרק הפונקציה הריבועית מודגשים היתרון של הייצוג הקודקודי לזיהוי תכונות מסוימות של הפרבולה, מול היתרון של הייצוג כמכפלה לזיהוי תכונות אחרות. אמנם התכונה לא קשורה לעולם האמיתי, אך היא מפתחת את ההרגל לחפש את דרך הפתרון היעילה להקשר הנתון.

- שימוש בחשיבה מתמטית וחשובית כדי לערוך תחזיות, לספק נימוקים לטיעונים, לבחון פתרונות אפשריים ולהשוות ביניהם:

לא מצאנו שימוש בחשיבה חשובית.

שימוש בחשיבה מתמטית כדי לספק נימוקים לטיעונים ולבחון פתרונות אפשריים הוא דגש מרכזי בתכנית הלימודים, והוא כולל בחינה ביקורתית של הסברים, בניית הסברים והוכחות, הן בתחום הגאומטריה והן בתחום האלגברה, וכן הפרכה באמצעות דוגמה נגדית.

יש שלוש פעולות שלא מצאנו בהקשר שלהן דגשים בתכנית הלימודים:

- הבנה כיצד העולם האמיתי משפיע על התוצאות והחשובים של פרוצדורה או מודל מתמטי, וזאת כדי לשפוט על פי ההקשר כיצד יש להתאים את התוצאות או להשתמש בהן.
- הפעלת ביקורת על המודל המשמש לפתרון הבעיה וזיהוי מגבלותיו.
- הערכה עד כמה משמעותיים הדפוסים והחוקיות שנצפו (או הוצעו) בנתונים.

לסיכום הסעיף הזה:

- מבין הפעולות הכרוכות בשלושת התהליכים המשמשים בפתרון בעיות מידול, המזכרים במסגרת המושגית של פיז"ה, תכנית הלימודים שלנו מדגישה את כל אלה הכרוכות ביישום, וקצת פחות מזה את הפעולות הקשורות בניסוח. יש הזדמנויות רבות לניסוח אך לא הרבה במשמעות של תרגום מהעולם האמיתי לעולם המתמטי. פעולות הקשורות בפירוש ובהערכה מודגשות פחות בתכנית הלימודים ולרוב מופיעות בשלב יותר מאוחר של הלמידה. החל מכיתה ט' יש גם לא מעט הזדמנויות להערכה אך כמעט ואין הזדמנויות לפירוש. לרוב הפעולות אינן קשורות לסיטואציות של העולם האמיתי.
- חשוב לציין שתכנית הלימודים לחטה"ב, על כל חלקיה, מדגישה למידה משמעותית לשם הבנה. תכנית הלימודים גם עוסקת בפיתוח שפה מתמטית שהיא בסיס הכרחי ליצירת כלים מתמטיים המשמשים ביישום וגם בפירוש ובהערכה. מכיוון שבחלק מהנושאים בתכנית אין דגש על הקישור לעולם האמיתי, לא תמיד יכולנו לזהות בתכנית את המרכיבים האלה, באופן שבו הם מנוסחים במסגרת התיאורטית של פיז"ה, בהקשר של העולם האמיתי.
- עוד מצאנו שתכנית הלימודים של חטה"ב מדגישה הנמקות והצדקות בכל הנושאים הקשורים בתכנית הלימודים, ובכך מהווה בסיס לפיתוח אוריינות מתמטית.

6.4 המבחנים הרשמיים כמשקפים את מקומה ומאפייניה של האוריינות המתמטית

לתכנית הלימודים המיושמת התייחסנו בעקיפין באמצעות מבחנים ארציים הנערכים בבתי הספר: מבחני מפמ"ר בכיתות ז ובכיתות ט ומבחני מיצ"ב בכיתות ח. למבחנים אלה יש השפעה על מה מורים מלמדים ומיישמים בפועל מתוך תכנית הלימודים, ובהקשר של המסמך הזה – על אילו היבטים של אוריינות מתמטית מושם דגש. אפשר לקבל באמצעות התבוננות במשימות הכלולות במבחנים, תמונה על המסרים שמתקבלים משרד החינוך, וכן מה כנראה מיושם הלכה למעשה, או, לחילופין, מה מורים יכולים להסיק לגבי המצופה מהם מתוך המשימות שהם פוגשים במבחנים. מבחני מפמ"ר הינם מבחנים המסכמים את שנת הלימודים בכיתה ז ובכיתה ט. בתי הספר עורכים את המבחנים בחלק מהשנים כמבחנים פנימיים הנותנים להם תמונה היכן נמצאים התלמידים שלהם מבחינת רמת הלמידה במתמטיקה ובחלק מהשנים כמבחן חיצוני שתוצאותיו נשלחות למפמ"ר.

מטרת העל של המסגרת של פיז"ה היא לפתח מודעות של התלמידים לתפקיד המתמטיקה בעולם ויכולת להסתכל על העולם בעיניים מתמטיות ולהשתמש במתמטיקה במציאות היום-יומית. מתוך 108 פריטי מבחן מפמ"ר לכיתות ז', מצאנו שכשליש קשורות באופן כללי לעולם האמיתי. אך מתוכן, רק כמחצית משקפות במידה מסוימת את הרוח והחזון של פיז"ה וגם הן לרוב ברמה קוגניטיבית לא גבוהה. במבחני מפמ"ר לכיתות ט' בהם יש 6 שאלות בכל מבחן, תמיד נכללת בעיה אחת מילולית ובעיה אחת נוספת בהסתברות. שתי השאלות האלו מוצגות כביכול עם קשר לעולם האמיתי, אלא שהבעיה בהסתברות לרוב עוסקת בהוצאת כדורים בצבעים שונים – מצב המתאר סיטואציה מאולצת של העולם האמיתי, שהתשובה על השאלה אינה עונה על צורך אמיתי. לעומתה, הבעיה המילולית לרוב עוסקת בחיי היום-יום, אך דומה במאפייניה לשאלות שנלמדו בכיתה (לדוגמה, בעיות תנועה) ולכן הרמה הקוגניטיבית של השאלה אינה גבוהה במיוחד. חשוב להדגיש כי בשאר השאלות במבחן העוסקות בפונקציות ובגיאומטריה, אין כל קשר למציאות והשאלות ניתנות בצורה מתמטית טהורה למרות שניתן היה לבצע את הקישור לסיפורים מחיי היום-יום ולהציג דרך לשימושים מתמטיים מגוונים. באופן דומה במבחני מיצ"ב השאלות בנושאים של הסתברות, סטטיסטיקה וקריאת נתונים, הן תמיד סביב סיפורים מחיי היום-יום, ברמות קושי שונות וברמות אותנטיות משתנות. בשאלות המילוליות במבחן, לרוב מתמקדים בבעיות מסוגים שונים בנושא אחוזים ובחלק פונקציות, ורק לעתים יש נגיעה קלה לחיי היום-יום. כפי שעלה במבחני המיצ"ב שניתחנו, שאר השאלות לקוחות מהעולם המתמטי ללא קשר למציאות, אפילו בנושא כמו אומדן שממש מתבקש לקשר לחיי היום-יום. עם זאת, חלק מהן אפשר למנף על מנת להעמיק את רמת האוריינות והדרישה הקוגניטיבית של המשימה. בנספח מובאות שתי דוגמאות הלקוחות מהמבחנים, כולל דרכים למינוף שלהן.

7. סיכום - ממצאים, מסקנות והמלצות

המטרה המרכזית שעמדה לנגד עינינו במחקר שערכנו הייתה לבחון באיזו מידה וכיצד ניתן לעשות אינטגרציה בין המסגרת הקונספטואלית של פיז"ה לבין הוראת המתמטיקה בחטה"ב, בדגש על פיתוח אוריינות וחשיבה מתמטית מסדר גבוה בקרב תלמידי חטה"ב. לשם כך ניתחנו מסמכים וערכנו סקר ספרות מקיף. המסמכים שניתחנו לצורך זה כללו: (1) מסמכים רשמיים של פיז"ה המתארים ומפרטים את המסגרת הקונספטואלית של פיז"ה; (2) מסמכים רשמיים הקשורים לתכנית הלימודים במתמטיקה לחטה"ב, לרבות מסמכים נלווים כגון חוזרי מפמ"ר ומדגם של מבחנים מטעם משרד החינוך; (3) ספרות מקצועית בינלאומית – תיאורטית ומחקרית – הקשורה להשפעה של פיז"ה ברחבי העולם, למושגים המרכזיים במסגרת של פיז"ה ולגישות להוראת מתמטיקה. בנוסף לניתוח המסמכים וסקירת הספרות, נשענו על הידע והניסיון רב השנים שלנו, במחקר בחינוך מתמטי, בהוראת מתמטיקה בבית הספר העל יסודי, בהכשרת מורים למתמטיקה, בתכנון והפעלה של תכניות להתפתחות מקצועית של מורים למתמטיקה, בתכנון קוריקולרי ופיתוח ספרי לימוד וחומרי לימוד לתלמידים (כולל חומרים לטיפול מצוינות במתמטיקה בחטה"ב), ובפיתוח משאבי הוראה למורים ולמורי מורים למתמטיקה.

ממסמכי פיז"ה עולה כי אוריינות מתמטית נמצאת בבסיס המסגרת הקונספטואלית וכל יתר המושגים, הרעיונות והתכנים המתמטיים סובבים סביבה. המסגרת המושגית של פיז"ה מדגישה את המקום המרכזי של חשיבה מתמטית בתהליכי פתרון בעיות, בפרט, ובאוריינות מתמטית, בכלל. אין במסגרת התייחסות לאופן שבו יש ללמד כדי להשיג את המטרות של פיז"ה. לשם כך, נכנסנו לעובי הקורה כדי להבין אילו גישות הוראה יכולות לתמוך בהשגת מטרות העל של פיז"ה.

ניתוח תכנית הלימודים במתמטיקה לחטה"ב התמקד באיתור התייחסויות לאוריינות מתמטית (וכחלק ממנה – גם למידול), בין אם במפורש או באופן לא מפורש. בנוסף נבדקה ההתייחסות לפיתוח הבנה והנמקה מתמטיות, שחשיבותן מודגשת במסגרת הקונספטואלית של פיז"ה. הניתוח העלה שתכנית הלימודים במתמטיקה לחטה"ב על כל חלקיה שמה דגש על למידה לשם הבנה ועל הנמקות והצדקות. לגבי אוריינות מתמטית, מצאנו התייחסויות אליה אף כי היא איננה מודגשת די הצורך, ולרוב לא במובן המלא שלה. רוב המשימות המובאות במסמכים שניתחנו, שיש להן קשר לעולם האמיתי, מיישמות כלים מתמטיים שנלמדו לסיטואציות מחיי היום-יום, ואינן משמשות נקודת מוצא לבניית מושגים ועקרונות מתמטיים מתוך סיטואציות מחיי היום-יום. מצאנו שונות רבה בין המשימות הקשורות לעולם האמיתי, במגוון רחב של מאפיינים.

כתוצאה מכך, התחדדה אצלנו ההכרה שיש לפתח מערכת קטגוריות לבחינת משימות אורייניות, או ליתר דיוק, משימות שלפחות למראית עין קשורות לעולם האמיתי. החשיבות של מערכת כזאת נעוצה במקומן המרכזי של משימות לימוד בתהליכי ההוראה והלמידה ובידיעה שללא ניתוח מעמיק של הפוטנציאל הגלום במשימה, קשה לקבוע באיזו מידה היא עשויה לסייע לקידום המטרות של פיז"ה ולפיתוח חשיבה ברמה גבוהה. מערכת זו (ר' הנספח), הכוללת שש קטגוריות מרכזיות, מהווה תוצר חשוב של המחקר, שאפשר יהיה להשתמש בו כדי לאפיין ולהעריך את מידת ההלימה בין מאפייני המשימה למסגרת הקונספטואלית של פיז"ה ואת הפוטנציאל שלה לפיתוח רמות חשיבה גבוהות. אחת הקטגוריות עוסקת בדרכים אפשריות למינוף משימות אורייניות. קטגוריה זו, הנשענת על יתר הקטגוריות, מתייחסת למשימה כבסיס לשיפור ויכולה לשמש כגשר מעשי לאינטגרציה הרצויה בין המסגרת הקונספטואלית של פיז"ה לבין הוראת המתמטיקה בחטה"ב.

נעבור תחילה לסיכום הממצאים ולמסקנות מניתוח תכנית הלימודים אודות מקומה של אוריינות מתמטית בתכנית הלימודים, ולאחר מכן – למסקנות מסקר הספרות אודות גישות הוראה ורמות חשיבה במתמטיקה שיש להן נגיעה לחזון של המסגרת של פיז"ה ולפיתוח אוריינות מתמטית. נחתום את הפרק הזה בהמלצות.

7.1 ממצאים ומסקנות לגבי מקומה של אוריינות מתמטית בתכנית הלימודים

7.1.1 ממצאים עיקריים מניתוח תכנית הלימודים לחטה"ב

(1) במסמכים הקשורים לתכנית הלימודים יש התייחסות לאוריינות מתמטית ברוח ההגדרה של פיז"ה ויש גם הנחייה לשלב משימות אורייניות בהוראה, בפרקי לימוד מסוימים, כולל הפנייה למקורות בהם ניתן למצוא משימות מסוג זה. אולם, האוריינות איננה מופיעה כחלק אינטגרלי ורצוף של תכנית הלימודים. יש נושאים שממש מתבקש לשלב בהם משימות אורייניות (למשל, נושא החזקות) ואין אזכור לזה. רוב הדוגמאות המופיעות בתכניות הלימודים, לרבות המבחנים הרשמיים של משרד החינוך, אינן מדגימות את האוריינות המתמטית במלוא מובנה. אם מסתכלים על המבחנים הרשמיים של משרד החינוך כמשדרים מסר למורים מה להדגיש ובאיזה אופן, ממצא זה לא מעודד.

(2) יש פער גדול בין טבען של משימות הקשורות לסיטואציות מהעולם האמיתי המופיעות במסמכים הרשמיים של משרד החינוך (כולל המבחנים הרשמיים של משרד החינוך) לבין משימות האורייניות הלקוחות ממקורות אחרים (חלקן הגדול ממבחני פיז"ה הקודמים, וחלקן שזורות בחלק מספרי הלימוד לחטה"ב). בעוד שמשימות האורייניות שהינן נפרדות מתכנית הלימודים נשענות על סיטואציות שנראות אותנטיות והשאלות הנשאלות הן רלוונטיות והגיוניות, במשימות מתכנית הלימודים (כולל המבחנים) יש במקרים רבים שימוש בסיטואציות מלאכותיות ומאלצות, שבהן הקשר בין הסיטואציה למתמטיקה הוא שטחי, והשאלות סביבן לא תמיד עולות בקנה אחד עם מה שסביר לשאול. בפרט, בחלק מהמשימות התלמיד מתבקש למצוא מידע שהוא גלוי לחלוטין בעולם האמיתי, על סמך מידע מלאכותי. (ר' דוגמאות בנספח).

(3) הגישה המשתקפת ממרבית המשימות הקשורות לסיטואציות מהעולם האמיתי שניתחנו, היא של יישום עקרונות ותכנים מתמטיים לפתרון בעיות מציאותיות, בשונה מהגישה שיוצאת מסיטואציות מהעולם האמיתי ומצמיחה מתוכן מודלים ועקרונות מתמטיים (מתמטיזציה).

4) משימות המידול המופיעות בתכנית הלימודים לא תמיד דורשות לעבור את שלושת התהליכים במעגל המידול לפי פיז"ה (ניסוח, יישום, פירוש והערכה). מבין הפעולות הכרוכות בשלושת התהליכים הללו, תכנית הלימודים מדגישה את כל אלה הכרוכות ביישום, וקצת פחות מזה את הפעולות הקשורות בניסוח. פעולות הקשורות בפירוש ובהערכה, הנחשבות כמשקפות חשיבה מסדר גבוה, מופיעות בהרבה פחות נושאים בתכנית הלימודים, ובעיקר בשלב הרבה יותר מאוחר.

5) בתכנית הלימודים יש אינספור הצעות והנחיות לפיתוח חשיבה והנמקה מתמטיות. זאת בהלימה למסגרת התיאורטית של פיז"ה 2021, שמדגישה את המקום המרכזי של חשיבה מתמטית בתהליכי פתרון בעיות, בפרט, ובאוריינות מתמטית, בכלל. חלק גדול מההצעות מהוות הזדמנויות לפיתוח חשיבה מתמטית ברמה גבוהה.

6) תכנית הלימודים לחט"ב, על כל חלקיה, מדגישה למידה לשם הבנה. תכנית הלימודים גם עוסקת בפיתוח שפה מתמטית שהיא בסיס הכרחי ליצירת כלים מתמטיים המשמשים ביישום וגם בפירוש והערכה. כיוון שבחלק מהנושאים בתכנית אין דגש על הקישור לעולם האמיתי, לא תמיד יכולנו לזהות בתכנית את המרכיבים האלה, באופן שבו הם מנוסחים במסגרת התיאורטית של פיז"ה, בהקשר של העולם האמיתי.

7) לא מצאנו בתכנית הלימודים התייחסות לחשיבה חישובית, אף כי חלק ממאפייניה מוזכרים ואף מודגשים, כמו למשל, זיהוי חוקיות.

ממצאים אלה הוליכו למסקנות הבאות:

7.1.2 מסקנות מניתוח תכנית הלימודים לחט"ב

- כפי שנאמר, המשימות הרווחות בתכנית הלימודים והקשורות לסיטואציות מהעולם האמיתי, מבטאות דרגות שונות של אוריינות ואינן בהכרח משקפות סיטואציות שנתפסות כמתקבלות על הדעת או אותנטיות. לכן, יש חשש שמורים יתייחסו לכל בעיה שיש בה תיאור של סיטואציה מהעולם האמיתי כאילו היא משימה אוריינית.
- בגלל המיקום הנפרד והשולי יחסית של אוריינות בתכנית הלימודים, יש חשש שמורים יראו במשימות האורייניות בעיקר אמצעי להכין את התלמידים למבחן פיז"ה. זאת במקום לסגל את האוריינות כ"אורח חיים", ולחנך את תלמידיהם להתבונן סביבם "בעין מתמטית".
- מיעוט ההקשרים מן העולם האמיתי וההזדמנויות לעסוק במידול, במובן שמתואר במסגרת של פיז"ה, עלול לפגוע בהתפתחות היבט מרכזי של אוריינות מתמטית, לפי פיז"ה, שהוא היכולת של התלמידים להעריך את כוחה של המתמטיקה לפתור בעיות בהקשר של העולם האמיתי, וגם בהרגל להתבונן בעולם האמיתי "בעין מתמטית".
- מהעובדה שתכנית הלימודים מפתחת את הכישורים המופיעים במסגרת של פיז"ה, ניתן כנראה להסיק שהמאמץ להרחיב כישורים אלה כך שיתאימו גם לסיטואציות מהעולם האמיתי הוא בר השגה.

7.2 גישות להוראת מתמטיקה היכולות לפתח אוריינות מתמטית

מסקר הספרות שערכנו עולה כי אין גישת הוראה אחת שמוסכם עליה שהיא "הטובה מכולן" ללימוד מתמטיקה, בכלל, ולפיתוח אוריינות מתמטית, בפרט. רוב הגישות נמצאות על רצף, ובדרך כלל לא מדובר בדיכוטומיה. בהקשר של גישות הוראה ורמות חשיבה במתמטיקה, סקר הספרות התמקד בחמש שאלות:

1) מי עומד במרכז ההוראה?

- כיום יש הסכמה כמעט גורפת שלמידה משמעותית מתרחשת בסביבה ממוקדת בתלמיד, המאפשרת לתלמידים לבנות את הידע מתוך התנסויות שהמורה מזמן להם, תוך אינטראקציה עם

עמיתים לכיתה ועם המורה. למידה ממוקדת בתלמיד מאופיינת בתקשורת ושיח מתמטי ובלמידה שיתופית. כדי לפתח אוריינות מתמטית, חשוב שסביבת הלמידה תהיה ממוקדת תלמיד.

(2) מהי הוראה יעילה במתמטיקה?

- הוראה יעילה ואיכותית מאופיינת, בין היתר, בכך שהיא: מציבה מטרות מתמטיות שממקדות את הלמידה; משלבת משימות מתמטיות המקדמות חשיבה מתמטית ויכולת פתרון בעיות; מקשרת בין ייצוגים מתמטיים כאמצעי להעמקת ההבנה; יוצרת שיח מתמטי משמעותי; מעלה שאלות שתכליתן להעריך ולקדם את החשיבה המתמטית של התלמידים; בונה שליטה של התלמידים בפרוצדורות על בסיס הבנה קונספטואלית; מזמנת אתגרים מתמטיים ותומכת בהתחבטויות לגביהם ובהתמודדות פרודוקטיבית איתם.

(3) איך קושרים בין העולם המתמטי לעולם החוץ-מתמטי?

- באופן כללי, יש שלוש גישות שונות להוראת מתמטיקה בהקשר של שני העולמות – האמיתי והמתמטי. שתי הגישות הראשונות מקשרות בין העולם האמיתי לעולם המתמטי והשלישית מתמקדת (כמעט) לגמרי בעולם המתמטי.

הגישה הראשונה נשענת על RME (Realistic Mathematics Education). מטרת העל של גישת RME היא הוראת מתמטיקה באופן שמדגיש את חשיבותה ואת הצורך בה, תוך אמונה שמטרה זו מושגת באופן הטוב ביותר כאשר יוצאים מהעולם האמיתי, ומצמיחים ממנו כלים ועקרונות מתמטיים תוך כדי תהליך של פתרון בעיות.

הגישה השנייה יוצאת מהעולם המתמטי, ואז מיישמת עקרונות וכלים מתמטיים לבעיות המעוגנות בסיטואציות מהעולם האמיתי. כדי שלגישה השנייה תהיה השפעה בכיוון של מימוש המטרות של פיז"ה חשוב שהיא תיכלל בשגרת ההוראה, ושתהיה מסה קריטית של התנסויות עם משימות אורייניות.

הגישה השלישית גורסת שלימוד המתמטיקה צריך להתרחש כולו בעולם המתמטי, כמתמטיקה טהורה, ללא כל קשר לעולם האמיתי, בתקווה שכאשר תלמידים יזדקקו למתמטיקה בחיי היום-יום שלהם הם יידעו איך ליישם אותה.

שתי הגישות הראשונות מאפשרות פיתוח אוריינות מתמטית ברמה גבוהה ברוח פיז"ה. גם אם מלמדים מתמטיקה בגישה השלישית, ניתן לשלב בלימוד המתמטיקה בעיות מעניינות ומאתגרות מחיי היום-יום, שממחישות כיצד המתמטיקה יכולה לשמש לפתרון, על מנת לחשוף את התלמידים לשימושים של המתמטיקה בעולם האמיתי ולהדגים את הרלוונטיות של המתמטיקה למציאות.

(4) מה הקשר בין למידת חקר לאוריינות מתמטית?

- קיים קשר הדוק בין למידה מבוססת חקר לבין אוריינות מתמטית במלוא מובנה, ברוח פיז"ה, לרבות פתרון בעיות מידול. למידה מבוססת חקר (IBL: Inquiry-Based Learning) מעצם טבעה ממוקדת בתלמיד. היא כוללת למידה מבוססת פתרון בעיות (PBL: Problem-Based Learning), למידה מבוססת מידול (Mathematical Modeling), ולמידה מבוססת פרויקטים (Project-Based Learning). בסביבת למידה מבוססת חקר התלמידים חוקרים בעיות משמעותיות/אותנטיות, מזהים מה צריך ללמוד כדי לפתור את הבעיה ובונים אסטרטגיות לפתרון. הבעיות הן לרוב מציאותיות, לעיתים מעורפלות במקצת (כמו שקורה במציאות), עם ריבוי פתרונות וגישות לפתרון. תכניות לימודים מבוססות חקר שמות דגש על שילוב יישומים מהעולם האמיתי ומידול כחלק מתהליך הלמידה. תפקיד המורה לתמוך בתלמידים בצורה פעילה אך לא ישירה, לשמש כמנחה אבל לא לכונן את התלמידים על כל צעד ושעל מה עליהם לעשות.

גישות חקר מציבות אתגרים מורכבים למורה. בשונה ממה שנהוג לחשוב, יישום מושכל של גישות חקר במתמטיקה תלוי בצורה קריטית בידע ובמיומנויות של המורה. מורים נוטים לטעות ולחשוב שלמידה מבוססת חקר הממוקדת בתלמיד לא חייבת להיות מובנית, בעוד שגישות אלה מחייבות תמיכה נרחבת של המורה בתלמידים והערכה והתאמה בלתי פוסקות במהלך הלמידה. יישום של גישות חקר בלמידת מתמטיקה מחייב הכשרה מיוחדת וליווי מקצועי של המורים.

5) מה מקומן וטבען של משימות מתמטיות בתהליך ההוראה?

- למשימות הלימוד יש השפעה מכרעת על אופיין וטיבן של ההזדמנויות ללמידה, והן משקפות ומעצבות את דרכי הוראת המתמטיקה. בחירה ובנייה של משימות אורייניות, ובפרט – משימות אורייניות עם דרישה קוגניטיבית ברמה גבוהה, היא מלאכה מורכבת. משימות שהן לכאורה אורייניות, יכולות להיות שונות בתכלית – החל מאוריינות במלוא מובנה וכלה בקשר רופף ושטחי למציאות ושאלות נלוות שאינן הגיוניות. נראה כי אפשר ללמד ברוח המסגרת של פיז"ה ולהגיע לרמות חשיבה גבוהות והבנה מעמיקה של המתמטיקה ושל תפקידה בפתרון בעיות בחיי היום-יום באמצעות משימות מידול ומשימות אורייניות איכותיות המעוגנות בהקשרים. לשם כך, יש צורך בכלי לאפיין משימות אורייניות ולהעריך את הפוטנציאל שלהן בהשגת המטרות הללו.

מערכת הקטגוריות שפיתחנו יכולה לשרת ככלי לאפיין והערכה של משימות אורייניות, בין אם לצורך פיתוח או מינוף משימות עבור תלמידים, או לצורך בניית תכניות הכשרה או התפתחות מקצועית של מורים למתמטיקה. עם זאת, משימה אוריינית שיש בה כל המאפיינים של משימת מידול עשירה עם דרישה קוגניטיבית גבוהה עדין לא מבטיחה שהפוטנציאל שלה ימומש. "הצלחת" המשימה תלויה במידה רבה באופן שבו המורה מנווט אותה בכיתה.

על בסיס הממצאים והמסקנות שהעלינו, גיבשנו המלצות לגבי דרכי פעולה שיכולות לקדם אוריינות מתמטית ברמה גבוהה לפי המסגרת פיז"ה.

7.3 המלצות

ההמלצות שגיבשנו עוסקות בתכנית הלימודים במתמטיקה – המוצהרת והמיושמת, ובהכשרה וליווי של מורים למתמטיקה במגמה לקדם את החזון והמטרות של פיז"ה.

- יש מקום להוסיף פרקי לימוד שונים בתכנית הלימודים לרשימת הפרקים שמומלץ לשלב בהם משימות אורייניות, ברוח ההגדרה של פיז"ה. למשל, את הפרק על חזקות ממש מתבקש ללמד בגישה אוריינית, על רקע העיסוק הרב כיום בגידול אקספוננציאלי ושיטוח העקומה.
- יש להוסיף לתכנית הלימודים משימות אורייניות ברמה קוגניטיבית גבוהה ובמיוחד כאלה שכוללות גם דרישה לפירוש והערכה. צריך **מסה קריטית** של משימות אורייניות כדי להטמיע את האוריינות המתמטית בתכנית הלימודים.
- למרות שאנחנו לא מצדדות בלימוד שמכוון בעיקרו להצלחה במבחן, אפשר ומומלץ לנצל את הערוץ של המבחנים הרשמיים של משרד החינוך, כדי לשדר למורים מסרים שתומכים בהרחבת השימוש במשימות הקשורות לעולם האמיתי בצורה יותר אוריינית. אם המבחנים יכללו משימות אורייניות ברוח פיז"ה, יש לשער שמורים יכללו יותר משימות כאלה בהוראה שלהם.
- הניתוח שעשינו הסתמך רק על מסמכים רשמיים של משרד החינוך. מטבע הדברים, תכנית הלימודים מהווה את התכנית המוצהרת, המסמכים הנלווים מהווים צוהר לתכנית המיושמת, ואילו המבחנים משקפים במידה מסוימת את התכנית המושגת. על התכנית המיושמת אפשר ללמוד הרבה יותר מתוך ניתוח ספרי הלימוד הנהוגים בבתי הספר. שתיים מהדוגמאות שהבאנו למשימה אוריינית במלוא המובן לקוחות מתוך ספר לימוד לחטה"ב (ר' הנספח). כדי לקבל תמונה יותר ברורה על מה שמיושם בבתי הספר, או לפחות מה שקיים (בספרי הלימוד) ורק צריך להפיח בו רוח חיים, רצוי לנתח את ספרי הלימוד המקובלים בבתי הספר, ולאתר בהם הזדמנויות לפיתוח אוריינות מתמטית ברמה גבוהה. מערכת הקטגוריות שפיתחנו יכולה לשמש כלי לניתוח ולמינוף משימות.

5) כפי שציינו כמה וכמה פעמים, הוראה ברוח החזון של פיז"ה, מחייבת הכשרה של מורים למתמטיקה בכמה מישורים. ראשית, הם צריכים לפתח בעצמם "חוש לאוריינות". בנוסף, צריכה להיות להם מודעות לחשיבות של פיתוח אוריינות מתמטית אצל התלמידים, יכולת לאפיין ולהעריך משימות מחיי היום-יום לפי הפוטנציאל שלהן לפתח אוריינות ברמה גבוהה, ויכולת להתאים ולשנות משימות מחיי היום-יום כך שהפוטנציאל שלהן לפיתוח אוריינות אצל התלמידים יגדל. כמו כן, חשוב שהמורים יידעו איך לממש את הפוטנציאל של משימות מתמטיות תוך ניווט ההוראה בכיתה. מערכת הקטגוריות שפיתחנו יכולה לשרת את המורים גם בתהליך ההכשרה וגם במהלך עבודת ההוראה.

ההמלצה להתמקד במורים נשענת על הניסיון של מרילין גוס מאוסטרליה ושל אד סילבר מארה"ב.

בהרצאתה במסגרת כנס בינלאומי וירטואלי⁹ הצביעה Merrilyn Goos על ההכרח להקדיש זמן כדי להכין מורים לשילוב אוריינות מתמטית כחלק אינטגרלי של ההוראה שלהם וכאורח חיים. הכנה מתאימה דורשת מחשבה ותכנון. היא הדגימה כיצד היא עובדת עם מורים, ומה זה אומר להפוך את האוריינות המתמטית לאורח חיים. היא סיפרה איך תוך כדי קריאת העיתון בצורה ביקורתית צפים אצלה רעיונות איך להפוך, מידע או ידיעה שקראה, לבסיס של בעיה של מידול. ההמלצות שלנו נשענות, בין היתר על המלצותיה.

על דרכים נוספות לפתח אצל מורים למתמטיקה חשיבה אוריינית, אפשר ללמוד מפרויקט בארה"ב. בראשות אד סילבר שנקרא UPDATE (Using PISA to Develop Activities for Teacher Education). (2014, Silver & Snider).

לסיכום, המסגרת הקונספטואלית של פיז"ה מתווה יעדים וחזון שחשוב לדעתנו (ולדעת רבים) לחתור אליהם. בפרט, פיתוח חשיבה מתמטית ברמה גבוהה, יכולת לפתור בעיות ולקבל החלטות מושכלות במגוון הקשרים מחיי היום-יום, והבנת כוחה ותפקידה של המתמטיקה בעולם. מהמחקר שערכנו עולה כי יש תשתית בתכנית הלימודים ובחומרים הנלווים להתקדם בכיוונים אלה. לא מדובר ב"הכל או לא כלום", אלא ברצף. גם לא מדובר בשינויים מרחיקי לכת. צריך להשקיע עוד בפיתוח משאבי הוראה ולמידה ובהנחיית מורים, כדי לבסס את מקומה של האוריינות המתמטית בתכנית הלימודים, בתקווה שהיא תהפוך לאורח חיים.

⁹ PISA Conceptual Framework as an Approach for Teaching and Learning Mathematics – September 6, 2020.

8. רשימת מקורות (References)

- Aydeniz, M. (2018). Integrating computational thinking in school curriculum. In M. S. Khine (Ed.), *Computational thinking in the STEM disciplines: Foundations and research highlights* (pp. 253-277). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- Banchi, H. & Bell, R. (2008). The many levels of inquiry. *Science and Children*, 46(2), 26–29.
- Barron, B. & Darling-Hammond, L. (2015). How can we teach for meaningful learning? In L. Darling-Hammond et al., *Powerful learning: What we know about teaching for understanding* (pp. 11-70). Jossey-Bass.
- Blum, W. & Niss, M. (1989). Mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. In W. Blum, M. Niss & I. Huntley (Eds.), *Modelling, applications and applied problem solving* (pp 1 – 21). Chichester: Ellis Horwood.
- Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37–68.
- Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 41–62.
- Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (1999). How people learn: Brain, mind, experience, and school. Washington, DC: National Academy Press.
- Burkhardt, H. (1981). *The real world and mathematics*. Glasgow, United Kingdom: Blackie.
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155-177.
- Kaiser, G. (2018). The teaching and learning of mathematical modeling. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp.267-291). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.
- Lerman, S. (Ed.) (2020). *Encyclopedia of mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Lester, F. K., Jr. (Ed.). (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: Information Age; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Maass, K. (2018). Scaling up innovative teaching approaches in mathematics: Supporting teachers to take up a new role as professional development course leaders for Inquiry-Based Learning. *Journal of Education and Training Studies*, 6(7), 1-16.
- Maass, K. & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: A synthesis. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 45(6), 779–795.

- Mayer, R. E. (2002). Cognitive theory and the design of multimedia instruction: An example of the two-way street between cognition and instruction. *New Directions for Teaching and Learning*, 89, 55–71.
- Murawska, J. M. & Zollman, A. (2015). Taking it to the next level: Inductive reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 20(7), 417–422.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston: Author.
- OECD (November, 2018). *Pisa 2021 Mathematics Framework (second draft)*. [https://pisa2021-maths.oecd.org/files/PISA 2021 Mathematics Framework Draft.pdf](https://pisa2021-maths.oecd.org/files/PISA%2021%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf)
- Pierce, R., & Stacey, K. (2006). Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 214–225.
- Schwarz, B. B., Dreyfus, T., & Hershkowitz, R. (2009). The nested epistemic actions model for abstraction in context. In B. B. Schwarz, T. Dreyfus, & R. Hershkowitz (Eds.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 11–41). London, UK: Routledge.
- Silver, E. A. (2016). Mathematical problem solving and teacher professional learning: The case of a modified PISA mathematics task. In P. Felmer, (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 345–360). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- Silver, E. A., & Snider, R. B. (2014). Using PISA to stimulate STEM teacher professional learning in the United States: The case of mathematics. *Issues in Teacher Education*, 23(1), 11–30.
- Sjøberg, S. (2015). PISA and global educational governance – A critique of the project, its uses and implications. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(1), 111–127.
- Smith, M. S. & Stein, M. K. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344–349.
- Stacey, K. (2015). The real world and the mathematical world. In K. Stacey & R. Turner (Eds.) *Assessing mathematical literacy* (pp. 57–84). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- Stacey, K. et al. (2015). PISA's influence on thought and action in mathematics education. In K. Stacey & R. Turner (Eds.) *Assessing mathematical literacy* (pp. 275–306). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. A. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455–488.
- Stein, M. K. & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, 2(1), 50–80.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268–275.

- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York: Teachers College Press.
- Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.
- Synge, J. L. (1951). *Science: Sense and nonsense*. London: John Cape.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9*. Utrecht: Utrecht University.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2020). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 713–717). Cham, Switzerland: Springer.
- Vos, P. (2020). Task contexts in Dutch mathematics education. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *National reflections on the Netherlands didactics of mathematics: Teaching and learning in the context of Realistic Mathematics Education, ICME-13 Monographs* (pp. 31–52). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- Webb, D. C. & Peck, F. A. (2020). From tinkering to practice—The role of teachers in the application of realistic mathematics education principles in the United States. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International reflections on the Netherlands didactics of mathematics: Visions on and experiences with Realistic Mathematics Education, ICME-13 Monographs* (pp. 21–38). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- Wijers, M. & de Haan, D. (2020). Mathematics in teams—developing thinking skills in mathematics education. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *National reflections on the Netherlands didactics of mathematics: Teaching and learning in the context of Realistic Mathematics Education, ICME-13 Monographs* (pp. 15–29). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1994). Socio-mathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458–477.

נספח: מערכת קטגוריות לניתוח משימות אורייניות

במסגרת המחקר שערכנו, התחדדה אצלנו ההכרה שיש לפתח מערכת קטגוריות לבחינת משימות אורייניות, או ליתר דיוק, משימות שלפחות למראית עין קשורות לעולם האמיתי. החשיבות של מערכת כזאת נעוצה במקומן המרכזי של משימות לימוד בתהליכי ההוראה והלמידה ובידיעה שללא ניתוח מעמיק של הפוטנציאל הגלום במשימה, קשה לקבוע באיזו מידה היא עשויה לסייע לקידום המטרות של פיז"ה ולפיתוח חשיבה ברמה גבוהה.

כפי שמפורט בגוף הדו"ח, המערכת לניתוח משימות כוללת את הקטגוריות הבאות:

1. אפיון הקשר של הבעיה לעולם המציאותי
2. תהליכי מידול הנדרשים מהתלמיד
3. דרישה קוגניטיבית של המשימה
4. נגישות המשימה לתלמידים ברמות שונות
5. רמת האוריינות והקשר למטרות העל של פיז"ה
6. דרכים למינוף המשימה

בהקשר של משימות הקשורות לעולם האמיתי, הבחנו במגוון רחב של מאפיינים לכל אחת מהקטגוריות. להלן חמש משימות הקשורות לעולם האמיתי. שתיים מהן הופיעו במבחני המפמ"ר, האחת לקוחה מאוסף פריטי פיז"ה ושתיים מספרי לימוד. באמצעות ניתוח המשימות, נדגים איך מערכת הקטגוריות שפיתחנו מאפשרת לאפיין ולהעריך את מידת ההלימה בין המשימות למסגרת הקונספטואלית של פיז"ה ואת הפוטנציאל שלהן לפיתוח רמות חשיבה גבוהות ולהשגת המטרות של פיז"ה.

משימה 1

סוסים באורווה

- לענת יש אורווה עם סוסים. ענת נוהגת לתת להם גזרים פעם ביום.
- באחד הימים היא הביאה 50 גזרים כדי להאכיל בהם את הסוסים.
- לכל סוס היא נותנת 4 גזרים בדיוק ונותרו לה 2 גזרים.
- כמה סוסים יש לענת באורווה?
- לקוח מתוך מדגם 2 מבחן מפמ"ר כיתה ז', תשע"ט, שאלה 2.

משימה 2

בחירת מפה עגולה



- אורית רכשה שולחן עגול שהקוטר שלו הוא 1 מטר.
- היא מעוניינת לקנות מפה עגולה לשולחן כך ששטחה של המפה יהיה גדול משטחו של השולחן.
- הציעו הצעה למידות המפה:
- א. רדיוס של המפה: _____
- ב. שטח המפה: _____
- לקוח מתוך מדגם 2 מבחן מפמ"ר כיתה ז', תשע"ט, שאלה 12.

משימה 3

פיצות

פיצרייה מגישה שתי פיצות עגולות באותו עובי ובגדלים שונים. הקוטר של הפיצה הקטנה הוא 30 ס"מ ומחירה 30 ש"ח. הקוטר של הפיצה הגדולה הוא 40 ס"מ ומחירה 40 ש"ח.

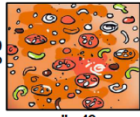
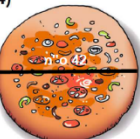
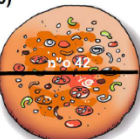
איזו פיצה היא תמורה טובה יותר לכסף? נמקו את תשובתכם.

תרגום והתאמה של פריט M154 מתוך PISA released items, דצמבר 2006.

משימה 4

אוריינות – בפיצרייה של מוטי

1. בפיצרייה של מוטי יש שמונה סוגי פיצות. הפיצות נבדלות זו מזו בשילוב שבין הצורה, הגודל, וכמות הגבינה. בטבלה שלפניכם מוצגות הפיצות השונות.

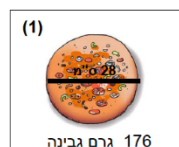
(1)  גרם גבינה 176	(3)  גרם גבינה 396	(5)  גרם גבינה 297	(7)  גרם גבינה 396
(2)  גרם גבינה 176	(4)  גרם גבינה 396	(6)  גרם גבינה 264	(8)  גרם גבינה 264

מוטי עקב במשך מספר חודשים אחרי העדפות הקונים. הוא מצא שיש העדפה ברורה של הקונים לפיצות (1), (2), (4), (7) על פני הפיצות האחרות.

מה לדעתכם יכולה להיות הסיבה להעדפה זו?

$$\pi = \frac{22}{7}$$

2. בפיצרייה של מוטי משתמשים להכנת הפיצות בגבינה שבה 28% שומן. השותף החדש של מוטי הציע לשלב גבינה שבה אחוז השומן נמוך יותר – 22% שומן. כך שהיחס בין כמות הגבינה שבה 22% שומן לכמות הגבינה שבה 28% יהיה 4 : 7. מה תהיה כמות הגבינה, מכל סוג, בכל אחת מהפיצות?



3. מחירה של פיצה מספר (1) הוא 46 שקלים. אילו מחירים הייתם קובעים לפיצות מספר (2), (4), (7) ? הסבירו.

4. איזה מחיר הייתם קובעים לפיצה מספר (6) ? הסבירו.

משימה 5

מבצע לחגים

לקראת החגים פרסמו חנויות שונות של כלי בית מבצע לחגים.
דרגו את המבצעים על פי הכדאיות שלהם. הסבירו.

(3) "לבית ולמטבח"

**קנה אחד
קבל שני חינם**

(2) "המטבח שלי"

**קנה שניים
השלישי עלינו**

(1) "הכל לבית"

**50% הנחה
על כל המוצרים**

(6) "כלים יפים"

**משלמים רק
75% מהמחיר**

(5) "מרכז הבית"

**כל מוצר
ב- 1/2 מחיר**

(4) "כלי הבית שלי"

**קנה אחד
השני בחצי מחיר**

(8) "הכל למטבח"

**קנו שלושה קבלו
את הרביעי חינם**

(7) "מטבחים"

**25% הנחה
על כל המוצרים**

לקוח מתוך "אפשר גם אחרת", כיתה ח', חלק א, עמוד 225, שאלה 1.

ניתוח חמש המשימות לפי מערכת הקטגוריות

מבצעים לחגים	הפיצרייה של מוטי	פיצות	בחירת מפה עגולה	סוסים באורווה	הבעיה / אפיון	
					אפיון הסיטואציה	הקשר לעולם האמיתי
הסיטואציה סופר אותנטית, מעוגנת היטב במציאות. לעיתים קרובות אנחנו נדרשים להבין מה ההבדלים בין מבצעים שונים.	הסיטואציה אותנטית ומוכרת. יש פיצריות שבהן מוכרים פיצות בשתי צורות (עיגול ומלבן) ובגדלים שונים.	הסיטואציה אותנטית ולוונטית למצבים רבים בחיים, שבהם יש צורך להשוות בין כדאות של מוצרים שונים.	סיטואציה מאולצת: במציאות לא נותנים מידה של מפה עגולה לפי הרדיוס שלה אלא לפי הקוטר ולא מדברים על שטח המפה אלא על כמות הבד ו/או מחיר המפה. בנוסף, הסיטואציה איננה לקוחה מעולם ההתנסויות של התלמידים.	הסיטואציה מציאותית, אבל לא מעניינת במיוחד.	האם אותנטית? מציאותית? מאולצת?	
השאלה לגבי כדאיות המבצעים השונים היא רלוונטית לסיטואציה וחשובה לקבלת החלטות יומיומיות.	השאלות הגיוניות, אבל לא במידה שווה. שאלות 1, 3, 4 ממש רלוונטיות ומשמעותיות. לעומתן, שאלה 2 קצת מאולצת – למה חשוב לדעת מה כמות הגבינה מכל סוג?	שאלה הגיונית מאד, שחשוב לעסוק בה ולהבין את תרומת המתמטיקה לשיקולים מושכלים בבחירת מוצרים שונים.	לא הגיוני ואין צורך לשאול על שטח המפה. כדי לוודא שהמפה תתאים לשולחן מספיק להבטיח שהקוטר שלה גדול מקוטר השולחן, במידה סבירה (שהשוליים לא יהיו קצרים מדי וגם לא ארוכים מדי).	השאלה לחלוטין לא הגיונית: במציאות ענת יכולה לספור את הסוסים ישירות ואין צורך לחשב את מספרם לפי מספר הגזרים שהיו לענת.	האם הגיונית? האם עונה על צורך?	

מבצעים לחגים	הפיצרייה של מוטי	פיצות	בחירת מפה עגולה	סוסים באורווה	הבעיה	
					אפיון	
המשימה מחייבת תרגום של המשמעות של כדאיות (בהקשר הזה) במונחים מתמטיים.	המשימה דורשת לתרגם את הסיטואציה במונחים מתמטיים, של אחוזים, יחס ושטחים.	השאלה דורשת לתרגם את המושג היומיומי של "תמורה לכסף" לשפה מתמטית, כלומר, במקרה הזה, לקשר בין המחיר לכמות הפיצה, שנמדדת כאן בשטח העיגול.	מתבקש לתרגם את השאלה לצורך לבחור רדיוס גדול מזה של המפה, אך לא גדול מדי (כדי שהמפה לא תגיע לרצפה). לשם כך צריך גם להעריך מה גובהו של שולחן רגיל, ולתרגם את זה למונחים מתמטיים (רדיוס/קוטר) ולאלוץ לגבי מידות המפה.	מתבקש לתרגם את הבעיה למודל מתמטי של חילוק, ולהבין שצריך להתעלם משני הגזרים שנותרו.	תהליכי מידול הנדרשים	ניסוח
יש צורך להשתמש בכלים מתמטיים ולערוך חישובים שיאפשרו השוואה בין המבצעים השונים.	המשימה דורשת ליישם עקרונות מתמטיים ונוסחאות שטח של עיגול ושל מלבן.	יש צורך בבחירה במדד, שיאפשר השוואה בין מחירי הפיצות השונות, וביישומן. חישוב היחס בין כמות הפיצה למחיר שלה יכול לסייע. כאן מתקבל פתרון בעולם המתמטי (השוואה בין שני יחסים).	יש צורך ליישם כמה פרוצדורות – חישוב הרדיוס בהינתן הקוטר, חישוב שטח העיגול באמצעות הרדיוס.	יש צורך לבצע פעולת חילוק פשוטה.		יישום
צריך לפרש ולהעריך את התוצאות של החישובים בהקשר לסיטואציה. מבצע שנראה כדאי יותר, כי נותן תמורה גבוהה יותר לכסף, הוא עדיף. יש מבצעים שהם יקרים יותר וכוללים כמות מוצרים שאין בהם צורך.	מתבקש לפרש את תוצאות החישובים במונחים של הסיטואציה ולהעריך את סבירות הממצאים.	יש צורך לחזור לסיטואציה ולפרש את הפתרון המתמטי במונחים של הסיטואציה. יש גם מקום להעריך אם התשובה הזאת צריכה להנחות את הבחירה בפועל.	בסיטואציה כיתתית שבה יכולות לעלות הצעות שונות לפתרון, אפשר לעודד תלמידים להעריך את ההצעות של חבריהם ולבחון אם הן עומדות בדרישות.	-		פירוש והערכה

מבצעים לחגים	הפיצרייה של מוטי	פיצות	בחירת מפה עגולה	סוסים באורווה	הבעיה / אפיון	
					רמה נמוכה	רמה גבוהה
			יש הכוונה מפורשת מה לחשב, לפי נוסחה ידועה (שטח עיגול לפי הרדיוס שלו).	הבעיה מחייבת ביצוע חילוק פשוט בלבד	רמה נמוכה (נסמכת בעיקר על שינון חיכרון ו/או דורשת ביצוע פרוצדורות ידועות ללא קישורים)	דרישה קוגניטיבית
המשימה ברמה הגבוהה ביותר – היא פתוחה ללא הכוונה באילו כלים מתמטיים להשתמש ומה להשוות. אין אלגוריתם או מודל מתמטי ברור מראש לפתרון.	חלק מהשאלות פתוחות ואין הכוונה למבנים ועקרונות מתמטיים או דרכי פתרון שרלוונטיים לשאלות. זה מחייב לחקור ולנתח את הנתונים ולקשר למושגים מתמטיים ידועים.	אין במשימה רמז איך לכמת את התמורה לכסף ולהשוות את הכדאיות היחסית של כל פיצה. יתרה מזאת, המספרים שנבחרו עלולים לתת את הרושם שהכדאיות זהה, כפי שעולה אם מחשבים (בטעות) את היחס בין הקוטר למחיר. המשימה דורשת חשיבה מורכבת ולא אלגוריתמית. היא מחייבת שימוש מושכל בידע קודם. כדי לבחור וליישם כלי מתמטי שמתאים לסיטואציה.	-	-	רמה גבוהה (דורשת הבנה וקישור בן מושגים ו/או ייצוגים; מורכבת, פתוחה, דורשת ניתוח וסינתזה)	דרישה קוגניטיבית
יש הבדלים בין המבצעים ביחס לקושי להעריך את כדאיותם. כל תלמיד יכול להעריך לפחות חלק מהמבצעים, ולדרג אותם.	כל תלמיד יכול להעלות רעיונות לגבי חלק מהפיצות המועדפות. רעיונות אלה יכולים להוות בסיס לדיון כיתתי.	תלמידים יכולים להשיב ברמות שונות -	יש מספר רב של פתרונות אפשריים, לכן אפשר לדון בהצעות השונות.	רצפה ותקרה נמוכים – אין בה אתגר עבור תלמידים שמתעניינים במתמטיקה		נגישות לתלמידים ברמות שונות

הבעיה / אפיון	סוסים באורווה	בחירת מפה עגולה	פיצות	הפיצרייה של מוטי	מבצעים לחגים
רמת האוריינות והקשר למטרות העל של פיז"ה	המשימה מחטיאה את המטרה, ואפילו פוגעת במטרות. המסר שעלול להתקבל הוא שאין למתמטיקה באמת ערך בפתרון בעיות מהעולם האמיתי.	המשימה מחטיאה את המטרה. הסיטואציה איננה מספיק רלוונטית לתלמידים, ולא סביר שבעזרתה יפתחו הערכה לתפקיד המתמטיקה בפתרון בעיות מציאותיות.	המשימה עשויה לתרום ליכולת להשתמש במתמטיקה בחיי היומיום ולהבנות כוחה של המתמטיקה בפתרון בעיות מן החיים.	המשימה עשויה לתרום ליכולת להשתמש במתמטיקה בחיי היומיום ולהבנות כוחה של המתמטיקה בפתרון בעיות מן החיים.	המשימה עשויה לתרום ליכולת להשתמש במתמטיקה בחיי היומיום ולהבנות כוחה של המתמטיקה בפתרון בעיות מן החיים.
דרכים למינוף המשימה	באותה הסיטואציה, במקום לשאול על מספר הסוסים אפשר לשאול לכמה סוסים יספיקו הגזרים, ומה הייתם מציעים לעשות אם יש יותר סוסים או פחות סוסים מהמספר שמצאתם. אפשר גם לשאול על דרכים אחרות לחלוקת הגזרים. למשל, מה אם חלק מהסוסים גדולים יותר וזקוקים ליותר גזרים. כך המשימה תהיה פתוחה ותחייב הפעלת שיקול דעת, שימוש גם באומדנים, ובניית קריטריונים להשוואה בין ההצעות השונות.	במקום לדבר על שטח המפה, אפשר היה לומר שאורית רוצה שהמפה תכסה את השולחן בתוספת שוליים. אפשר היה לבקש לבחור ולהצדיק כמה אפשרויות למפות שמתאימות לסיטואציה. יש לשער שאף אחד לא היה מחשב שטח. אפשר לתת מבחר מפות ולבדוק גם שיטפיקו לכיסוי השולחן וגם שלא יגיעו לרצפה, ואז אפשר לכלול גם מפה ריבועית. אפשר להוסיף שאלות לגבי מחירים של כמה מפות (בדומה לשאלת הפיצות) והקשר שלהן לכמות הבד. כך הדרישה הקוגניטיבית תעלה וגם יתעורר צורך לפרש ולהעריך.	המשימה ניתנה במסגרת של מבחן פיז"ה ולכן לא מוצה הפוטנציאל שלה כמשימה לימודית. בחיים המצב בדרך כלל יותר מורכב. למשל, אפשר לשאול מה היית בוחר/ת, דבר שיעלה את השאלה אם בהכרח מתאים לקנות את הפיצה שנותנת תמורה גבוהה יותר לכסף, מאחר והיא יקרה יותר ולא בטוח שיש לך צורך בפיצה גדולה. אפשר גם להעשיר את מבחר הפיצות (בדומה לבעיית ה"מבצעים לחגים"), ובכך להגדיל את המורכבות וריבוי הגישות.	במקום לשאול על כמות הגבינה מכל סוג, אפשר לשאול על כמות השומן בכל פיצה (בהנחה שהמקור היחיד לשומן הוא הגבינה). זאת שאלה שיש בה משמעות מבחינה בריאותית ו/או מבחינת הטעם של הפיצה. אפשרות נוספת היא לתת נתונים על מחירי הגבינות השונות ולשאול איך הם ישפיעו על מחירי הפיצות השונות.	אין צורך למנף את המשימה, אבל אפשר להעשיר אותה ולבקש מן התלמידים להביא בעצמם מבצעים אותנטיים מחיי היום יום שלהם, כמו לדוגמה, "בקניה מעל 200₪ תקבלו 100₪ במתנה בקניה הבאה", ועוד.

מבצעים לחגים	הפיצרייה של מוטי	פיצות	בחירת מפה עגולה	סוסים באורווה	הבעיה אפיון
נתקלנו בפועל במוכרת שטענה שהמבצע של "אחד והשני בחצי מחיר" זהה למבצע של "אחד פלוס אחד".	זו משימה ברוח המשימה על הפיצות, אבל הרבה יותר עשירה ומורכבת: יש כמה פיצות עגולות וכמה מלבניות, כל סוג בשני גדלים.	יש דמיון רב בין התוכן והכלים המתמטיים של שתי הבעיות – בעיית המפה העגולה ובעיית הפיצות – (חישוב שטחי עיגולים), אף כי הן שונות ברמות החשיבה ויתר האפיונים.		במשימה הזאת (וכן גם במשימת המפה העגולה) אין דרישה להסביר או לנמק, בשונה מיתר המשימות. הדרישה לנמק מעצם טבעה יכולה להעלות את הדרישה הקוגניטיבית של המשימה.	הערות נוספות