



פיתוח דפוסי חשיבה מתמטיים: יצירת קשר גמיש עם מספרים تطوير أنماط التفكير الرياضيّة: خلق علاقة مرنة مع الأرقام

מאת: ג'ו בולר
אוגוסט 2020
המאמר שלהלן תורגם ועובד בהזמנת קרן טראמפ



מרכז לידע ולמחקר בחינוך
مركز معلومات وبحث في التربية والتعليم
Center for Knowledge and Research in Education
האקדמיה הלאומית הישראלית למדעים



המאמר שלהלן תורגם כחומר רקע ליום עיון משותף של היוזמה - מרכז לידע ולמחקר בחינוך וקרן טראמפ. כותבת המאמר פרופ' ג'ו בולר, תהיה האורחת המרכזית ביום העיון. בולר היא מרצה להוראת המתמטיקה באוניברסיטת סטנפורד, ומכהנת כמנהלת פקולטה בקבוצת Youcubed.

לפרסום המלא ראו: [Boaler, J. \(2018\). Developing Mathematical Mindsets - The Need to Interact with Numbers Flexibly and Conceptually. American Educator, 42\(4\).](#)

תרגום מאנגלית: לירון רובינס
עריכת תרגום: מוריה יזרעאלב
עריכה מדעית: ד"ר תמי חלמיש אייזמן וד"ר עדו ליטמנוביץ
עיצוב גרפי: אמונה כרמל

תינוקות ופעוטות אוהבים מתמטיקה. תנו לתינוקות כמה קוביות והם יבנו בהן, יסדרו אותן ויהיו מרותקים מהאופן שבו הן נערמות זו על גבי זו. ילדים מתבוננים בשמיים ומתענגים למראה צורת ראש החץ של מעוף הציפורים. ספרו סדרת חפצים באוזני ילד צעיר ואז הזיזו את החפצים וספרו אותם שוב, והילד ישתאה מכך שהמספר לא השתנה. בקשו מילדים לבנות צורות מקוביות צבעוניות, והם יעבדו בשמחה וייצרו דפוסים חוזרים - אחת הפעולות המתמטיות ביותר שיש. המתמטיקאי קית' דבלין (Keith Devlin) כתב סדרת ספרים ובהן הציג ראיות מובהקות לכך שכולנו משתמשים במתמטיקה וחושבים מתמטיקה מטבענו.¹ אנו מבקשים למצוא דפוסים בעולם ולהבין את החוקיות שבה עובד היקום. ואולם ההנאה וההשתאות שילדים צעירים חווים במגע עם מתמטיקה מתחלפות במהירות לאימה ולסלידה כשהם מתחילים ללמוד מתמטיקה בבית הספר, ונחשפים לשיטות לימוד המצפות מהם לקבל ולזכור כפשוטן רצף של עובדות או פעולות.

בפינלנד, אחת המדינות בעלות ההישגים הגבוהים ביותר במבחני פיז"ה, ילדים אינם לומדים ניסוחים מתמטיים פורמליים עד גיל 7. בארצות הברית התלמידים מתחילים ללמוד בגיל צעיר הרבה יותר, ועד גיל 7 הם כבר נחשפים לפעולות חישוב כמו חיבור, חיסור, כפל וחילוק מספרים, ונדרשים לשנן את לוח הכפל. ההתנסות הראשונה של תלמידים רבים במתמטיקה מבלבלת מאוד, פשוט משום ששיטות ההוראה לא הגיוניות עבורם. הסקרנות המאפיינת את הילדים בגיל הרך דוהה ומתחלפת באמונה חזקה שמתמטיקה היא מילוי אחר כללים וחוקים ותו לא.

נקודת הפתיחה הטובה והחשובה ביותר שנוכל לתת לתלמידינו היא לעודד אותם לשחק עם מספרים ועם צורות, ולחשוב על הדפוסים ועל הרעיונות שהם רואים בהם. שרה פלאנרי (Sarah Flannery), שזכתה בפרס המדען הצעיר באירופה לשנת 1999 על המצאת אלגוריתם מתמטי חדש, מציינת באוטוביוגרפיה שלה כי פיתחה חשיבה מתמטית בעזרת הרכבת פאזלים בבית עם אביה, וכי הרכבת הפאזלים הייתה חשובה עבורה יותר מכל שנותיה בלימודי מתמטיקה (Flannery & Flannery, 2002).

אנשים שפיתחו גישה למתמטיקה והבנה מתמטית מצליחים להשתמש טוב יותר במתמטיקה מאשר אלו שלא הצליחו לפתח גישה משלהם לתחום. הם ניגשים למתמטיקה מתוך רצון להבין אותה ולחשוב עליה, ומלאי ביטחון שיוכלו למצוא את ההיגיון שמאחוריה. בתוך עולם המתמטיקה הם מחפשים דפוסים ויחסים, חושבים על הקשרים ביניהם, ויודעים שתפקידם הוא ללמוד ולחשוב על רעיונות חדשים. עלינו לפעול כדי שדפוס החשיבה המתמטי הזה יהיה מוכר לכל התלמידים כבר מההתנסות הראשונה שלהם עם המתמטיקה.

מחקרים הראו כי ישנה חשיבות גדולה מאוד לדפוס חשיבה מתפתח, דהיינו לאמונה של האדם ביכולתו לפתח את האינטליגנציה שלו באמצעות למידה. ככל שלומדים ומתרגלים יותר, כך מפתחים יותר נתיבים וקשרים בתוך החשיבה המתמטית. מנגד, כדי לשנות את תחושת הכישלון והחשש ממתמטיקה, עלינו לעזור לתלמידים לפתח דפוס חשיבה מתפתח ואמונה בעצמם. הדבר יאפשר להם להתייחס למתמטיקה כאל נושא מתפתח ומושגי, שעליהם לחשוב עליו ולהבין אותו.

אנשים בעלי דפוס חשיבה מתפתח (Growth mindset) מאמינים כי ביכולתם לפתח, לשפר ולשכלל את היכולות ואת האינטליגנציה שלהם באמצעות למידה, מאמץ והשקעה רבה.

לעומתם, **אנשים בעלי דפוס חשיבה מקובע (Fixed mindset)** מאמינים כי יכולות ואינטליגנציה הם קבועים מראש; אנשים נולדים עם יכולות מסוימות ואין להם אפשרות להשפיע עליהן.

לקריאה נוספת ראו: **הכול בראש - הדרך שבה כל תלמיד יכול להגיע למצוינות**. מגזין הגיע זמן חיבור.

כשהתלמידים מתייחסים למתמטיקה כאל סדרה של שאלות קצרות, הם אינם יכולים לראות את תפקידם בהתפתחות ובלמידה הפנימית שלהם. הם חושבים על מתמטיקה כעל מערכת סגורה וקבועה של שיטות שהם מצליחים - או לא מצליחים - להבין. אולם כשהתלמידים מתייחסים למתמטיקה כאל נוף רחב ידיים של פאזלים הממתינים להרכבה, נוף שבו יוכלו לשוטט להנאתם, לשאול שאלות ולחשוב על יחסים, הם מבינים כי תפקידם הוא לחשוב, לעבד, לגלות ולפתח את המתמטיקה. כשהתלמידים מתייחסים למתמטיקה כאל אוסף של רעיונות ויחסים, ומאמינים כי תפקידם הוא לחשוב על הרעיונות ולעבד אותם - נבנה דפוס חשיבה מתמטי.

אם כן, כיצד נוכל לפתח דפוס חשיבה מתמטי אצל התלמידים, כך שיהיו מוכנים לגשת למתמטיקה מצוידים ביכולות עיבוד ובאינטואיציה? לפני הכניסה לבית הספר, משימה זו ברורה וישירה. עלינו לבקש מהילדים לשחק בפאזלים, בצורות ובמספרים, ולחשוב על היחסים ביניהם.

אך בשנים הראשונות בבית הספר התמונה משתנה. מגיל צעיר מאוד נדרשים התלמידים ללמוד שיטות מתמטיות פורמאליות רבות, דוגמת אלה המשמשות לחיבור, לחיסור, לחילוק ולכפל של מספרים. זוהי התקופה שבה התלמידים מתרחקים מדפוס החשיבה המתמטי, ומפתחים במקום זאת דפוס חשיבה מקובעים המבוססים על פרוצדורות סטנדרטיות ואלגוריתמים מובנים. זוהי התקופה הקריטית שבה יכולים המורים וההורים להציג את המתמטיקה כנושא מושגי גמיש, שכל כולו נוגע לחשיבה ולעיבוד. העבודה על חשיבה כמותית בגיל הרך היא הדוגמה המושלמת לשני דפוסים החשיבה שיכולים להתפתח אצל התלמידים - דפוס חשיבה שלילי המוביל לכישלון, ודפוס חשיבה חיובי המוביל להצלחה.

תפיסה מתמטית

החוקרים גריי וטול (1994) ראינו תלמידים בני 7 עד 13, שמוריהם הגדירו את הישגיהם ברמות נמוכות, בינוניות או גבוהות. כל התלמידים קיבלו בעיות מספריות, כגון חיבור או חיסור שני מספרים. החוקרים גילו הבדל חשוב בין בעלי ההישגים הנמוכים והגבוהים. התלמידים עם ההישגים הגבוהים יצרו קשרים גמישים בין מרכיבי הבעיה והמספרים השונים ופתרו את הבעיות בעזרת שימוש בתפיסה מתמטית (number sense). התלמידים עם ההישגים הנמוכים לא השתמשו בתפיסה מתמטית, ונראה כי האמינו שתפקידם הוא להיזכר בשיטות הסטנדרטיות ולהשתמש בהן, גם כשהיה קשה לעשות זאת.

לדוגמה, כשהתלמידים קיבלו בעיה כגון (21-6), בעלי ההישגים הגבוהים הפכו את הבעיה לקלה יותר כששינו את התרגיל ל-(5-20), אולם בעלי ההישגים הנמוכים ספרו לאחור מ-21 ומטה - פעולה קשה יותר ומועדת יותר לטעויות. החוקרים בחנו את האסטרטגיות השונות שבהן השתמשו התלמידים כדי להבין את ההבדלים בין התלמידים בעלי ההישגים הגבוהים לנמוכים. הם גילו כי בעלי ההישגים הנמוכים יודעים מתמטיקה לא פחות טוב מבעלי ההישגים הגבוהים, אך הם עובדים עם המספרים בצורה שונה. במקום לגשת למספרים בגמישות ומתוך תפיסה מתמטית, נראה כי הם נצמדו לתהליכים הרשמיים שלמדו, השתמשו בהם באופן מדויק מאוד, ולא זנחו אותם אפילו כשהיה הגיוני יותר לעשות זאת. בעלי ההישגים הנמוכים לא ידעו פחות מהם, אלא פשוט לא השתמשו במספרים בגמישות - כנראה כיוון שהוצבו מגיל צעיר מאוד בנתיב הלא נכון, שבו התבקשו לשנן שיטות ועובדות מספריות במקום לפעול בגמישות עם המספרים (Boaler, 2015).

החוקרים ציינו דבר חשוב נוסף - המתמטיקה שבה השתמשו בעלי ההישגים הנמוכים הייתה קשה יותר לחישוב. קל יותר לחסר 5 מ-20, מאשר להתחיל ב-21 ולמנות שישה מספרים לאחור. לרוע מזלם של בעלי ההישגים הנמוכים, לעיתים קרובות מתייחסים אליהם כאל מתקשים במתמטיקה ולכן הם נדרשים לתרגל עוד יותר - מה שמחזק את אמונתם כי כדי להצליח במתמטיקה עליהם לשנן

שיטות, ולא לפעול מתוך הבנה או עיבוד עצמי של מצבים. עמדה זו גורמת להם להיצמד לתהליכים פורמאליים, וכתוצאה מכך, לעיתים קרובות הם חווים קשיים במתמטיקה לכל אורך החיים.

דפוס חשיבה מתמטי (mathematical mindset) משקף גישה פעילה לידע מתמטי, שבה התלמידים יודעים כי תפקידם הוא להבין ולעבד את המידע. תפיסה מתמטית משקפת הבנה עמוקה של מתמטיקה, ומתהווה באמצעות דפוס חשיבה מתמטי שמתמקד בעיבוד מספרים וכמויות. כדאי לחשוב על הדרכים שבהן מתפתחת תפיסה מתמטית אצל תלמידים, לא רק כיוון שזהו הבסיס לכל תחומי המתמטיקה ברמות הגבוהות יותר (Feikes & Schwingendorf, 2000), אלא כיוון שתפיסה מתמטית ודפוס חשיבה מתמטי מתפתחים זה לצד זה, והלמידה על דרכי ההתפתחות של האחד עוזרים לפיתוח האחרת.

מתמטיקה היא תחום המורכב ממושגים ומרעיונות, אך בניגוד לדעתם של רבים, אין מדובר ברשימת עובדות ושיטות שיש לשנן. כשהתלמידים לומדים לספור, הם זוכרים את סדר המספרים ואת שמותיהם, אך הם גם מפתחים את המושג "מספר"; כלומר, את הרעיון שמאחורי המספר. בשלבים המוקדמים שבהם לומדים התלמידים לחבר מספרים, הם מתרגלים שיטה שנקראת "ספירת המשך" (counting on). אנו משתמשים בשיטה זו כאשר יש לנו שתי סדרות מספרים - לדוגמה, 15 ועוד 4 - ההתנסות והתרגול מלמדים אותנו לספור את הסדרה הראשונה (לספור עד 15), ואז להמשיך לספור (16, 17, 18, 19). באופן הזה מתפתחת הבנת המושג המתמטי "סכום". ספירת המשך היא לא שיטה לחיבור שני מספרים, אלא מתודה לפיתוח מושג מתמטי.

בשלב הבא של לימודי המתמטיקה, התלמידים עשויים ללמוד כיצד לחבר קבוצות של מספרים, כגון שלוש קבוצות של 4, ובעודם לומדים לחבר קבוצות הם מפתחים את הרעיון "מכפלה". שוב, אין זו שיטה (של כפל); זהו מושג מתמטי. המושגים "מספר", "סכום" ו"מכפלה" הם מושגים במתמטיקה שעל התלמידים להבין לעומקם. תלמידים צריכים ללמוד שיטות כגון חיבור וכפל לא כמטרות בפני עצמן, אלא כחלק מבניית ההבנה המושגית של מספרים, סכומים ומכפלות, והקשרים ביניהם.

אנו יודעים שכאשר אנו לומדים מתמטיקה, אנו מפעילים תהליך במוח הנקרא "דחיסה" (compression). כשאנו לומדים תחום חדש במתמטיקה שאיננו מכירים כלל, הוא תופס נפח גדול במוח, כיוון שעלינו להשקיע מחשבה מרובה באופן הפעולה שלו ובקשר שלו לרעיונות אחרים. אולם המתמטיקה שלמדנו לפני כן ומוכרת לנו היטב, כגון פעולת חיבור, תופסת נפח קטן וקומפקטי יותר במוח. אנו יכולים להשתמש בה בקלות וללא מחשבה. תהליך הדחיסה מתרחש כיוון שהמוח הוא איבר מורכב ביותר שצריך לשלוט בדברים רבים, ויכול להתמקד בכל רגע נתון במספר מועט של רעיונות חדשים שאינם דחוסים. מושגים שיש לנו הבנה ושליטה בהם נדחסים ומתויקים. ויליאם תורסטון (William Thurston), מתמטיקאי שזכה במדליית פילדס, מתאר כך את תהליך הדחיסה:

מתמטיקה ניתנת לדחיסה באופן מדהים: אנו עשויים להיאבק במשך זמן רב, צעד אחר צעד, בעיבוד אותו תהליך או רעיון המוצג בגישות שונות. אולם ברגע שאנו מבינים אותו ומסוגלים להתבונן בו בשלמותו, מתרחשת לעיתים קרובות דחיסה מנטלית אדירה. אפשר לתייך את המידע, לשלוף אותו בשלמותו במהירות בעת הצורך ולהשתמש בו בתהליכים מנטליים אחרים. היכולת המושגת בזכות תהליך הדחיסה היא אחת ההנאות הגדולות ביותר במתמטיקה (Thurston, 1990).

תלמידים רבים אינם מתארים את המתמטיקה כ"הנאה גדולה", בין השאר משום שאינם עוסקים בדחיסה. יש לציין כי המוח מסוגל לדחוס רק מושגים; הוא אינו מסוגל לדחוס כללים ושיטות. לכן, תלמידים שאינם משתמשים בחשיבה מושגית אלא מתייחסים למתמטיקה כאל רשימת כללים

שיש לשנן אינם עוסקים בתהליך הדחיסה החיוני, ומוחם אינו מסוגל לארגן ולתייק את הרעיונות; במקום זאת, הוא נאבק להחזיק ברשימות ארוכות של כללים ושיטות. לכן חשוב כל כך לעזור לתלמידים לגשת למתמטיקה באופן מושגי כל הזמן. גישה מושגית למתמטיקה היא חיונית למה שאני מתארת כ"דפוס חשיבה מתמטי".

ומה בנוגע לעובדות מתמטיות?

אנשים רבים מאמינים כי אי אפשר לחשוב על מתמטיקה באופן מושגי כל הזמן, כיוון שיש עובדות מתמטיות רבות שיש לשנן, למשל $8 \times 4 = 32$. יש כמה עובדות מתמטיות שכדאי לזכור, אולם התלמידים יכולים ללמוד עובדות מתמטיות ולאחסן אותן בזיכרון באמצעות עיסוק והבנה של המושגים המתמטיים. לרוע המזל, יש הורים ומורים שחושבים שכיוון שתחומים מסוימים במתמטיקה קשורים בעובדות, כגון לוח הכפל, יש ללמד אותם באמצעות תרגול חסר חשיבה עד לשליטה בשליפה מהירה. גישה זו ללמידה מוקדמת של מספרים גורמת נזק לתלמידים, מובילה אותם לחשוב שהצלחה במתמטיקה פירושה שליפת עובדות במהירות, ודוחפת אותם לעבר תהליך שפועל נגד פיתוח דפוס החשיבה המתמטי שלהם.

עובדות מתמטיות כשלעצמן הן חלק קטן מהמתמטיקה, והאופן הטוב ביותר ללמוד אותן הוא באמצעות שימוש במספרים בדרכים שונות ובמצבים שונים. לרוע המזל, כיתות רבות מתמקדות בעובדות מתמטיות במנותק מנושאים אחרים וגורמות לתלמידים להאמין כי העובדות הן תמצית המתמטיקה, או גרוע מכך - התמחות בשליפתן מהירה פירושה הצטיינות במתמטיקה. שני הרעיונות הללו שגויים וחשוב לסלקם מהכיתה, כיוון שיש להם תפקיד חשוב ביצירת תלמידים הסובלים מניכור ומחרדת מתמטיקה.

גדלתי באנגליה בעידן פרוגרסיבי, שבו דגלו בגישה ב"הילד כמכלול", ולא נדרשתי לשנן טבלאות של חיבור, חיסור או כפל בבית הספר. מעולם לא אחסנתי עובדות מתמטיות בזיכרון אף שאני מרצה למתמטיקה ויכולה לפתור בעיות מתמטיות במהירות. היעדר השינון מעולם לא עיכב את חיי בשום זמן או מקום, כיוון שיש לי תפיסה מתמטית. חשוב יותר לפתח אצל תלמידים תפיסה מתמטית הכוללת למידה של עובדות מתמטיות לצד הבנה מעמיקה של מספרים והדרכים שבהן הם קשורים זה לזה.

עבור כשליש מהתלמידים, ההיכרות עם מבחנים קצובים בזמן מסמנת את תחילתה של חרדת המתמטיקה (Boaler, 2014).² המדענית הקוגניטיבית סיאן ביילוק (Sian Beilock) ועמיתיה חקרו את פעילות המוח של אנשים באמצעות דימות תהודה מגנטית (MRI) וגילו כי עובדות מתמטיות נשמרות בזיכרון העבודה של המוח. אך כשהתלמידים לחוצים, למשל כשעליהם לענות על שאלות מתמטיות בלחץ של זמן, זיכרון העבודה נפגע והם אינם יכולים לגשת לעובדות המתמטיות שהם יודעים (Beilock, 2011). כשהתלמידים קולטים שאינם יכולים להתמודד היטב במבחנים קצובים בזמן, הם מתחילים לפתח חרדה והמסוגלות העצמית שלהם נפגמת. חסימת זיכרון העבודה של המוח והחרדה הקשורה אליו נפוצות במיוחד בקרב תלמידים בעלי הישגים גבוהים ובקרב בנות. לפי הערכה שמרנית, לפחות שליש מהתלמידים חווים רמות לחץ גבוהות במיוחד הקשורות למבחנים קצובים בזמן; תלמידים אלה אינם שייכים לקבוצות הישגים מסוימות או לרקע כלכלי ייחודי. כשאנו מעמידים את התלמידים בהתנסויות מעוררות חרדה כאלה, אנו מפסידים אותם כתלמידי מתמטיקה.

2 המאמר תורגם לעברית, ראו: בולר, ג', וויליאמס, ק' וקונפר, א' (2014). [ריהיטות ללא פחד: עדות מחקרית לדרכים הטובות ביותר ללימוד עובדות מתמטיות](#). מאנגלית: ד"ר מיכל סוקניק. מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי.

חרדת מתמטיקה מתועדת כיום אצל ילדים כבר מגיל 5, ומבחינים קצובים בזמן הם גורם עיקרי למכשלה הזו, הנמשכת לעיתים כל החיים. בכיתותיי באוניברסיטת סטנפורד אני פוגשת סטודנטים רבים שסובלים מטרומה ממתמטיקה, אף שהישגיהם הם מהגבוהים בקליפורניה. כשאני שואלת אותם מה גרם לסלידתם ממתמטיקה, רבים מדברים על המבחינים הקצובים בזמן בכיתה ב או ג כנקודת מפנה חשובה, אז החליטו שלימודי מתמטיקה זה פשוט לא בשבילם. חלק מהסטודנטים, בעיקר סטודנטיות, מדברים על הצורך שלהם להבין לעומק (יעד ראוי מאוד בפני עצמו), ועל כך שהובהר להם כי הבנה מעמיקה אינה מוערכת או אפשרית מרגע שהמבחינים הקצובים בזמן הפכו לחלק בלתי נפרד מלימודי המתמטיקה. ייתכן שבזמן שיעורי המתמטיקה עצמם התלמידים עוסקים בפעילות אחרת ומתמקדים בעיבוד ובהבנה; אולם המבחינים הקצובים בזמן מעוררים רגשות עזים כל כך שהתלמידים מתחילים להאמין ששליפת עובדות מתמטיות במהירות רבה היא תמצית המתמטיקה. חבל מאוד שכך הדבר.

לדגש המוטעה ששמים בתי ספר על שינון ועל בחינות יש השלכות מעשיות, והן ניכרות במספר התלמידים הנושרים מכיתות המתמטיקה ובמשבר בהוראת המתמטיקה שאנו עומדים בפניו כעת. כשכתי החלה לשנן את לוח הכפל ולהיבחן עליו בגיל 5, היא החלה לחזור הביתה ולבכות בגלל מתמטיקה. לא כך אנו רוצים שהילדים יחוו כלפי מתמטיקה, אולם כל עוד אנו דורשים מהם לשלוף עובדות במהירות ובלחץ, לא נצליח למחוק את החרדה ממתמטיקה ואת הסלידה כלפיה שהפכו לשכיחות כל כך בבתי הספר שלנו (Silva & White, 2013).

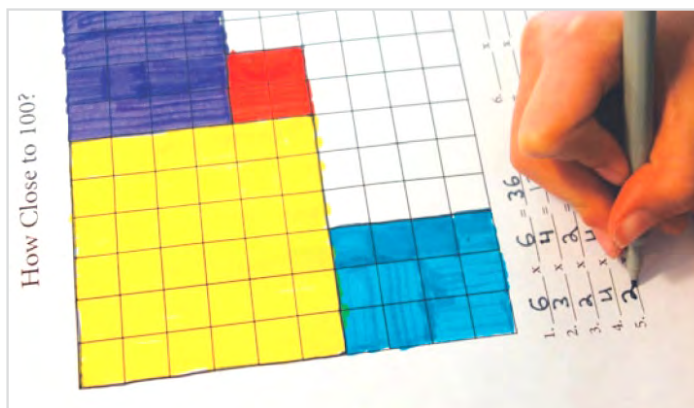
אם כן, כיצד נוכל לעזור לתלמידים ללמוד עובדות מתמטיות בלי להשתמש במבחינים קצובים בזמן? הדרך הטובה ביותר לעודד תלמידים ללמוד עובדות ולפתח דפוס חשיבה מתמטי היא להציע פעילויות מתמטיות שעוזרות לתלמידים ללמוד ולהבין מספרים ועובדות הקשורות למספרים. חוקרי מוח בדקו תלמידים שלומדים עובדות מתמטיות בשתי דרכים. גישה אחת הייתה באמצעות שימוש באסטרטגיות; לדוגמה, ללמוד את הפתרון לשאלה 17×8 באמצעות פתרון 17×10 (שווה 170) ואז לחסר 17×2 (כלומר 34). גישה שנייה הייתה באמצעות שינון של עובדות ($17 \times 8 = 136$). החוקרים מצאו כי שתי הגישות (אסטרטגיות ושינון) מפעילות שני נתיבים מובחנים במוח, וכי שני הנתיבים שימושיים מאוד לאורך החיים. עם זאת, המחקר מצא גם שתלמידים שהשתמשו באסטרטגיות השיגו "ביצועים מעולים" לעומת מי ששינונו את העובדות; הם פתרו את שאלות הבחינה באותה מהירות אבל התמודדו טוב יותר עם בעיות חדשות (כלומר, התקיים תהליך של העברה - transfer). החוקרים הגיעו למסקנה כי באמצעות הבנת היחסים בין המספרים, ותרגול אסטרטגיות שונות ניתן להגיע ליכולת עצמאית ואף אוטומטית לחישוב ולתפיסת המושג המתמטי הרצוי (Delazer et al., 2005).

במחקר אחר גילו חוקרים כי הלמידה היעילה ביותר מתרחשת כאשר אנו משתמשים בנתיבים שונים במוח. הצד השמאלי של מוחנו מטפל במידע עובדתי וטכני; הצד הימני מטפל במידע חזותי ומרחבי. תהליכי הלמידה והביצועים הקשורים למתמטיקה מגיעים לשיאם כאשר שני צדי המוח מתקשרים זה עם זה. עוד גילו החוקרים כי כאשר התלמידים עבדו על פתרון בעיות חשבוניות, כגון חיסור, בעלי ההישגים הגבוהים ביותר היו אלה שהפגינו קשרים חזקים ורבים יותר בין שני צדי המוח (Park & Brannon, 2013). ממצאים אלו חשובים ביותר ללמידת מתמטיקה. הם מראים כי תהליך הלמידה הפורמלי של עובדות מתמטיות - המהווה חלק ניכר מתוכנית הלימודים בבית הספר - מועצם ומופנם טוב יותר כאשר התלמידים משתמשים בחשיבה מתמטית חזותית ואינטואיטיבית.

קבוצת המחקר שהובלתי, Youcubed, כללה את הממצא הזה במאמר "רהיטות ללא פחד" (וראו גם: Boaler, 2014). המאמר כלל גם משחקים ותרגילים לימודיים שמורים והורים יכולים להשתמש בהם כדי לעודד את היווצרותם של הקשרים החשובים הללו במוח. אחד ממשחקי המתמטיקה שתיארנו במאמר צבר פופולריות רבה לאחר הפרסום, ונפוץ מסביב לעולם.

המשחק נקרא "כמה קרוב ל-100?" כל תלמיד משחק עם לוח משלו, המכיל רשת של 100 משבצות ריקות (10X10, ראו תרשים 1). השחקן הראשון מטיל שתי קוביות, ומשתמש במספרים שמתקבלים כדי ליצור מערך מלבני בכל מקום שהוא על הלוח. המטרה היא להיות הראשון שממלא את כל הרשת. לאחר כל הטלת קוביות, התלמיד מצייר את המערך על הלוח ורושם את התרגיל מתחתיו. המשחק מסתיים כשאחד השחקנים ממלא את הרשת שלו (לחצו כאן כדי לצפות בסרטון קצר המדגים את המשחק בכיתה). במשחק הזה התלמידים לומדים עובדות מספריות כגון 6X4, אולם הם עושים משהו חשוב אף יותר. הם חושבים על המשמעות של העובדות המספריות הללו ומה מייצג התרגיל 6X4 מבחינה חזותית ומרחבית כאחד, כלומר, מה השטח שתופס 6X4 ובאיזה אופן כדי למקם אותו.

תרשים 1: כמה קרוב ל-100? (How close to 100?)



משחק נוסף שמעודד את היווצרותם של הקשרים העוצמתיים במוח משתמש בכרטיסיות של מתמטיקה. אלו משמשות לרוב באופן מזיק ללימוד ולתרגול מהירות, אך ניתן להשתמש בהן בצורה שונה לגמרי. כרטיסיות המתמטיקה שלנו מציגות מספרים בדרכים שונות. לדוגמה, 9 ו-4 יכולים להיות מיוצגים באמצעות מודל של שטח, בקבוצות של עצמים כגון אבני דומינו, או בתרגיל מספרי (ראו תרשים 2). מטרת המשחק היא להתאים בין כרטיסיות עם אותו סכום כולל, המופיע בייצוגים שונים, וללא לחץ של זמן. המורים מניחים את כל הכרטיסיות על שולחן, ומבקשים מהתלמידים להרים אותן בתורם. התלמידים מרימים כרטיסיות רבות ככל האפשר עם אותו סכום, בייצוגים שונים, ומסבירים כיצד הם יודעים שהכרטיסיות השונות מייצגות את אותו הסכום.

תרשים 2: כרטיסיות מתמטיקה

9×4	4×9
	36

פעילות זו נועדה גם היא לחזק את ההבנה של פעולת הכפל - מבחינה חזותית ומרחבית כאחד - ולעודד את יצירת הקשרים במוח לצד חזרה על עובדות מתמטיות. כדי לאתגר את התלמידים עוד יותר, אפשר להפוך את הכרטיסיות ולשחק איתן משחק זיכרון.

פעילויות אלה מלמדות תפיסה מתמטית ודפוס חשיבה מתמטי, ומעודדות יצירת קשרים במוח. האנטיזה לגישה זו היא התמקדות בשינון בעל פה ובמהירות. ככל שנדגיש יותר את חשיבות השינון לתלמידים, כך הם ירצו פחות לחשוב על מספרים ועל היחסים ביניהם, לפתח תפיסה מתמטית ולהשתמש בה (Boaler, 2015). חלק מהתלמידים לא מצליחים לשנן עובדות מתמטיות כמו אחרים. חשוב לתמוך בשונות הזו ולהעצים אותה; זהו חלק מהמגוון הנפלא שמציעים החיים ובני האדם. דמיינו כמה נורא יהיה אם המורים יבחנו את התלמידים על עובדות מתמטיות, וכולם יענו באותו אופן ובאותה מהירות כמו היו רובוטים.

במחקר שנערך בשנת 2013 (Supekar et al., 2013) בחנו חוקרים את מוחם של תלמידים שלמדו לשנן עובדות מתמטיות. החוקרים ראו כי חלק מהתלמידים שינו את העובדות בקלות רבה יותר מאחרים. אין זה מפתיע עבורנו הקוראים, ורבים מאיתנו מניחים בוודאי שהתלמידים ששינו מהר יותר את העובדות היו "אינטלגנטיים" או בעלי הישגים גבוהים. אולם החוקרים מצאו כי התלמידים ששינו את העובדות בקלות רבה יותר לא היו בעלי הישגים גבוהים יותר; לא הייתה להם "יכולת מתמטית" גבוהה יותר, כפי שכיניו החוקרים, וגם לא מנת משכל גבוהה יותר. ההבדלים היחידים שגילו החוקרים נמצאו באזור במוח האחראי לעובדות ששוננו - ההיפוקמפוס. בדומה לאזורים אחרים במוח, ההיפוקמפוס אינו מקובע ויכול לגדול בכל זמן³, אולם תמיד יהיו תלמידים שמשננים מהר או לאט יותר, ואין לכך כל קשר לפוטנציאל שלהם במתמטיקה.

כדי להיות תלמיד טוב בשפה האנגלית וכדי לקרוא ולהבין ספרות ושירה, צריכים התלמידים לשנן את משמעויותיהן של מילים רבות. אולם אף תלמיד לא יטען או יחשוב שלימוד אנגלית כרוך בשינון ובשליפה מהירים של מילים בלבד, כיוון שאנו לומדים מילים במהלך השימוש בהן במצבים רבים ושונים - בדיבור, בקריאה ובכתיבה. מורים לאנגלית אינם נותנים לתלמידיהם מאות מילים לשנן ולאחר מכן בוחנים את הידע שלהם במבחן קצוב בזמן.

כל תחומי הלימוד דורשים מידה מסוימת של שינון עובדות, אולם מתמטיקה היא התחום היחיד שבו התלמידים עוברים מבחנים קצובים בזמן באופן תדיר כבר מגיל צעיר. מדוע אנו מתייחסים כך למתמטיקה? יש בידינו ראיות מחקריות המעידות על כך שתלמידים לומדים עובדות מתמטיות טוב יותר בעזרת פעילויות מהנות; כעת עלינו להשתמש בראיות הללו, ולשחרר את התלמידים מן הפחד ממתמטיקה.

3 דוגמה מפורסמת ליכולתו של ההיפוקמפוס לגדול מוצגת במחקר המונית השחורה בלונדון שעסק בנהגי מוניות. למידע נוסף על המחקר ראו: Woollett & Maguire, 2011.

Beilock, S. L. (2011). *Choke: What the Secrets of the Brain Reveal about Getting It Right When You Have To*. New York: Free Press.

Boaler, J. (2014). [Fluency without Fear: Research Evidence on the Best Ways to Learn Math Facts](#). Youcubed, Stanford, CA: Stanford University.

Boaler, J. (2015). *What's Math Got to Do with It?: How Teachers and Parents Can Transform Mathematics Learning and Inspire Success*. New York: Penguin Books.

Delazer, M., Ischebeck, A., Domahs, F., Zamarian, L., Koppelstaetter, F., Siedentopf, C. M., ...&Felber, S. (2005). Learning by strategies and learning by dri-I - evidence from an fMRI study. *Neuro image*, 25(3), 838-849.

Devlin, K. (2006). *The Math Instinct: Why You're a Mathematical Genius (along with lobsters, birds, cats and dogs)*. New York: Basic Books.

Feikes, D. & Schwingendorf, K. (2000). The Importance of Compression in Children's Learning of Mathematics and Teacher's Learning to Teach Mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* 7(2).

Flannery, S. & Flannery, D. (2002). *In Code: a mathematical journey*. New York: Workman Publishing.

Gray, E. M. & Tall, D. O (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A 'Proceptual' View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140.

Park, J. & Brannon, E. M. (2013). Training the Approximate Number System Improves Math Proficiency. *Association for Psychological Science*, 1-7.

Silva, E. & White, T. (2013). *Pathways to Improvement: Using Psychological Strategies to Help College Students Master Developmental Math*. Stanford, CA: Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching.

Supekar, K., Swigart, A. G., Tenison, C., Jolles, D. D., Rosenberg-Lee, M., Fuchs, L., & Menon, V. (2013). Neural predictors of individual differences in response to math tutoring in primary-grade school children. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(20), 8230-8235.

Thurston, W. P. (1990). Mathematical Education. *Notices of the American Mathematical Society*, 37(7), 844-850.

Woollett, K. & Maguire, E. A. (2011). Acquiring 'the Knowledge' of London's Layout Drives Structural Brain Changes. *Current Biology*, 21(24), 2109-2114.